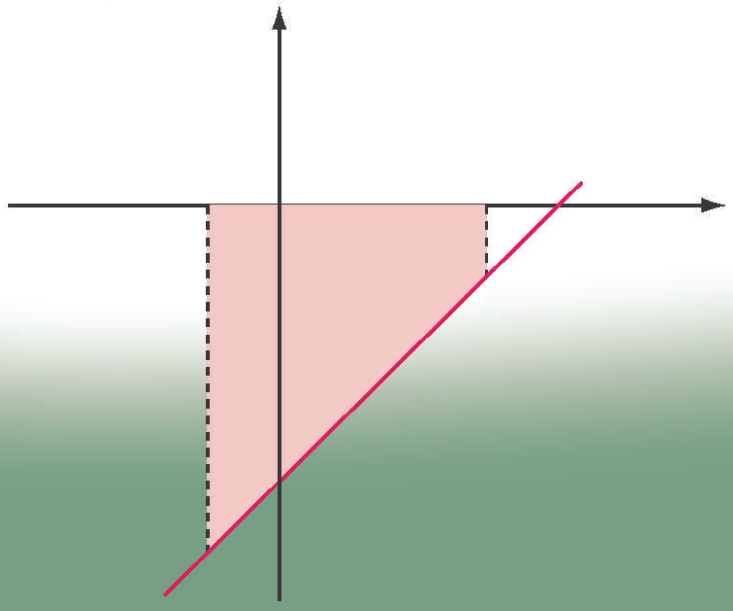
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي (القسم الأدبي)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم
١٤٣٣هـ/ ٢٠١٢م

http://e-learning-moe.edu.ye

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي (القسم الأدبي)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الإله علي حمد الحوري	أ. سالمين محمد باسلوم /منسقاً
د. عوض حسين البكري	د. محمد علي مرشد
د. محمد رشاد الكوري	أ. يحيى بكار مصفر
د. محمد حسن عبده المسوري	أ. عبدالباري طه حيدر
د. عبدالله سالم بن شحنة	أ. نصر محمد بدر
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري	أ. جميلة إبراهيم الرازحي
أ. يحيى محمد الكنز	أ. عادل علي مقبل البنا
أ. مريم عبدالجبار سلمان	أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان

فريق المراجعة والتطوير:

د. أمة الآله علي حمد الحوري	أ. عبدالحكيم حسن السفياني
أ. شرف عثمان الخامري	أ. يحيى محمد الكنز
أ. جميلة إبراهيم الرازحي	أ. مريم عبدالجبار سلمان

الإخراج الفني

الصف الطباعي: علي عبد العزيز عبده الصوفي
تصميم وإخراج: جلال سلطان علي

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

http://e-learning-moe.edu.ye

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.

أ/ علي حسين الحيمي.	د/ صالح ناصر الصوفي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	أ.د/ صالح عوض عرم.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله لملس.	د/ شكيب محمد باجرش.
أ/ منصور علي مقبل.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ/ محمد هادي طواف.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ/ عبدالله علي إسماعيل.	د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٢) وتاريخ ٢٠٠٤/٥/١٩م طباعة هذا الدليل وتوزيعه للتجريب للعام الدراسي ٢٠٠٤ / ٢٠٠٥م .

الطبعة الثانية

١٤٣٣هـ / ٢٠١٢م

http://e-learning-moe.edu.ye

بسم الله الرحمن الرحيم

التقديم

أعزائي المعلمين، عزيزاتي المعلمات :

لأن التطوير كلٌّ لا يتجزأ .. كان لا بد من أن تخضع المناهج التعليمية الحد يثة – في طرق تدريسها – إلى مرجعية واحدة موحدة، بدلاً من إبقائها خاضعة لمنطق تعددية الاجتهادات وتباينها، ولما تستوجبه ضرورات تطوير سبل التواصل بين طرفي العملية التد ريسية، بحيث تعم الفائدة على المعلم والطالب في آن واحدٍ معاً .. كان لا بد من أن يكون هناك د ليل مصاحب لكل كتاب مدرسي حتى يتحقق هدف اكتمال التطوير في هذا الجانب ليسهم في توضيح أسس الفلسفة التربوية ومبادئ السياسة التعليمية والمنطلقات والأهداف العامة للنظام التعليمي في اليمن، وكذلك الأهد اف الخاصة لكل مادة من المواد، وأساليب وإستراتيجيات التعليم والتقويم والخطة التدريسية والإرشادات العامة لتدريس الكتاب المدرسي .

نأمل من كل معلم ومعلمة اعتبار « دليل المعلم » مفتاحاً لاستيعاب مادة تخصصهم التدريسي، وأداة لتمكين طلابهم من فهم محتواها .

ومما لاشك فيه أن هذا الد ليل هو محاولة أولية لايستغني عن ملاحظات ومقترحات المعلمين الذين يضطلعون بأعظم مهنة وأسمى رسالة، لإثراء وتطوير هذا الدليل في طبعاته التالية في الجانبين العلمي والمنهجي مرحبين بكل ملاحظاتكم .

والله ولي الهداية والتوفيق ،،،

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

http://e-learning-moe.edu.ye

مقدمة الدليل

عزيزنا المعلّم ....

عزيزتنا المعلّمة....

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي القسم الأدبي فإننا نرى ضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي وكتاب التمارين .

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة ، وهذه الحصص لن تتم إلاَّ بتخطيط جيد ، وهذا مايسعى إليه هذا الدليل لمساعدتك لتحقيقه .

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للمرحله الثانويه ، وفق إستراتيجية تربوية شاملة ، وخطة واضحة المعالم . ومن أهم معالمها إنها تعطى أهمية كبيره لأنشطة الطلبة وتعلمهم الذاتي من خلال حل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، إضافة إلى إعطاء أهمية خاصة لأدلة المعلمين ، وفق معايير متجددة حتى يتمكن المدرس من الاستفادة منها استفادة حقيقة في مجال تخطيط الدروس وتنفذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سلمية وسلسة وشيّقة للطلبة في الكتاب المدرسي ، إضافة إلى التمارين والمسائل المتنوعة في كتاب التمارين ، فإننا أشد حرصاً على أن نقدم للمدرسين أفضل الطرائق ، وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعليم .

ولقد وضعنا في بداية هذا الدليل أهداف تدريس الرياضيات للمرحلة الثانوية عامة ، وللصفين الثاني والثالث الثانوي (القسم الأدبي) بشيء من التفصيل من واقع وثيقة المنهاج ، ثم اتبعناها بالرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي ومقدمات توضيحية حول منهجية واستخدام كل من الكتاب المدرسي وكتاب التمارين والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُنيت عليها وكيفية استخدامها .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا .

والله من وراء القصد ،،،

المؤلفون

http://e-learning-moe.edu.ye

المحتويات

الموضوع	الصفحة
مقدمة الدليل	٤
أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية	٧
أهداف تدريس الرياضيات للصف الأول الثانوي	٩
أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي)	١٠
أهداف تدريس الرياضيات للصف الثالث الثانوي (القسم الأدبي)	١١
جدول توزيع الحصص على الوحدات	١١
الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي	١٢
منهجية إعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه	١٥
منهجية إعداد كتاب التمارين وكيفية استخدامه	١٩
منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه	٢١
الوحدة الأولى : مبدأ العد	**٢٤**
جدول توزيع الحصص	٢٤
أهداف الوحدة	٢٤
المقدمة	٢٥
١ – ١ مبدأ العد	٤٢
١ – ٢ التباديل	٤٥
١ – ٣ التوافيق	٥٠
١ – ٤ اختبار الوحدة	٥٣

http://e-learning-moe.edu.ye

تابع المحتويات

الموضـــــوع		الصفحة
الوحدة الثانية : الإحصاء		**٥٦**
جدول توزيع الحصص		٥٦
أهداف الوحدة		٥٦
المقدمة		٥٧
٢ – ١	مراجعة	٦٢
٢ – ٢	الارتباط وأشكال الانتشار	٦٣
٢ – ٣	الانحدار	٦٧
٢ – ٤	اختبار الوحدة	٧١
الوحدة الثالثة : التكامل		**٧٤**
جدول توزيع الحصص		٧٤
أهداف الوحدة		٧٤
المقدمة		٧٤
٣ – ١	التكامل غير المحدد	٨١
٣ – ٢	التكامل المحدد	٨٢
٣ – ٣	تطبيقات التكامل في المساحات	٨٣
٣ – ٤	اختبار الوحدة	٨٤

http://e-learning-moe.edu.ye

أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية

يهدف تدريس الرياضيات في نهاية المرحلة الثانوية إلى :

١ – تَعَرُّف المتعلم على الأعداد المركبة، وإجراء العمليات عليها .

٢ – تَعَرُّف المتعلم على مبادئ المنطق الرياضي .

٣ – تَعَرُّف المتعلم على التطبيقات (الدوال)، وأنوعها .

٤ – تَعَرُّف المتعلم على التطبيقات العكسية، وإيجاد التطبيق العكسي لتطبيق معطى .

٥ – تَعَرُّف المتعلم على تركيب التطبيقات وإيجاده .

٦ – إجراء المتعلم للعمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية)، واستنتاج قوانينها .

٧ – تَعَرُّف المتعلم على اللوغاريتمات وخواصها، واستخدامها، وتمييز الدالة الأسية واللوغاريتمية ورسمها .

٨ – تَعَرُّف المتعلم على مفاهيم المتتاليات الحسابية والهندسية، واستنتاج بعض قوانينها (الحد العام، المجموع)، واستخدامها .

٩ – تَعَرُّف المتعلم على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصها وحل مسائل عليها .

١٠ – تَعَرُّف المتعلم على نهاية بعض الدوال، وحسابها .

١١ – تَعَرُّف المتعلم على مشتقات بعض الدوال، وحسابها باستخدام القواعد .

١٢ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية .

١٣ – تَعَرُّف المتعلم على النظم الرياضية الجبرية ذات العملية الواحدة، وذات العمليتين .

١٤ – تَعَرُّف المتعلم على المصفوفات والمحددات، والمتجهات، وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استخدام المتعلم بعض خواص المصفوفات، والمحددات، في حل أنظمة من المعادلات الخطية .

١٦ – استنتاج المتعلم لبعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية، وحل المثلث القائم .

http://e-learning-moe.edu.ye

١٧ – إيجاد المتعلم لميل ومعادلة المستقيم في المستوى، واستنتاج معادلة المماس .

١٨ – تَعَرُّف المتعلم على المتجهات وخواصها، وإجراء العمليات عليها .

١٩ – إكساب المتعلم مفاهيم الدوران، والتكبير، والانعكاس تحليلياً وتركيب الدوران والتحاكي .

٢٠ – استنتاج المتعلم بعض معادلات القطوع المخروطية، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .

٢١ – تَعَرُّف المتعلم على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بينها .

٢٢ – برهنة المتعلم لبعض مبرهنات الهندسة الفضائية، وستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .

٢٣ – حساب المتعلم لمقاييس التشتت، وبعض معاملات الارتباط .

٢٤ – برهنة المتعلم بعض قوانين ومبرهنات الاحتمالات، واستخدامها في حل بعض المسائل.

٢٥ – تَعَرُّف المتعلم على حساب التكامل واستنتاج بعض قوانينه .

٢٦ – إجراء المتعلم لبعض التكاملات، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .

٢٧ – استخدام المتعلم الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

٢٨ – إكساب المتعلم بعض القيم العملية السليمة مثل الأمانة العلمية والنظام والترتيب والاعتماد على النفس من خلال منهجية علم الرياضيات .

٢٩ – تنمية روح البحث والابتكار لدى المتعلم ومتابعة التطورات العملية المعاصرة.

٣٠ – تنمية الذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال والبنى الرياضية المختلفة .

٣١ – تقدير المتعلم لدور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

http://e-learning-moe.edu.ye

أهداف تدريس الرياضيات للصف الأول الثانوي

يتوقع من المتعلم بعد الانتهاء من دراسة مقرر الصف الأول الثانوي أن يكون قادراً على :

١ – التَعَرُّف على مبادئ المنطق الرياضي .

٢ – التَعَرُّف على التطبيقات ، وأنواعها (الثابت ، المحايد ، المتباين ، الغامر) .

٣ – إجراء العمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .

٤ – التَعَرُّف على الحدوديات ، وخواصها ، وإيجاد أصفار الحدوية .

٥ – التَعَرُّف على النظام ذي العملية الثنائية ، وخواصه (الزمرة) .

٦ – حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير أو متغيرين .

٧ – حل معادلات من الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد بطريقة القانون العام، واستخدام المميز لمعرفة نوع جذري المعادلة .

٨ – حل جملة المتراجحات من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً .

٩ – حل متراجحة من الدرجة الثانية ذات متغير واحد .

١٠ – إيجاد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، وبعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

١١ – إيجاد ميل ومعادلة المستقيم في المستوى .

١٢ – اكتساب مفاهيم الانعكاس ، والانسحاب ، والدوران تحليلياً (باستخدام قواعد جبرية) .

١٣ – ذكر شروط التوازي والتعامد ، وإيجاد العلاقة بين مستقيمين في مستوى .

١٤ – التَعَرُّف على المتجهات ، وخواصها وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استنتاج بعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .

١٦ – التَعَرُّف على المجموع والرمز (مجـ) وخواصه .

١٧ – إيجاد مقاييس النزعه المركزية ، (الوسط، الوسيط ، المنوال) .

١٨ – إيجاد مقاييس التشتت (المدى ، التباين ، الانحراف المعياري) .

١٩ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والمسائل التطبيقية .

http://e-learning-moe.edu.ye

٢٠ – تنمية بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والموضوعية واحترام آراء الآخرين.
٢١ – إدراك دور الرياضيات في خدمة ودراسة فروع المعرفة الأخرى .
٢٢ – تذوق جمال وتناسق الرسوم والأشكال البيانية والبنى الرياضية المختلفة .
٢٣ – تكوين البصيرة الرياضية على فهم الرياضيات بأنها فكرة دائمة التطور .
٢٤ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي)

يكون المتعلم بعد الانتهاء من دراسة مقرر الصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي) قادراً على:

١ – استخدام قوانين الأسس ، اللوغاريتمات ، وحل المعادلات عليها .
٢ – التَعَرُّف على مفاهيم المتتاليات الحسابية ، والهندسية .
٣ – التَعَرُّف على بعض قوانين المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستخدامها (الحد العام ، المجموع) .
٤ – التَعَرُّف على المصفوفات والمحددات وإجراء العمليات عليها .
٥ – استخدام المصفوفات والمحددات في حل أنظمة من المعادلات الخطية .
٦ – التَعَرُّف على بعض المشتقات .
٧ – إيجاد مشتقات بعض الدوال .

http://e-learning-moe.edu.ye

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثالث الثانوي (القسم الأدبي)

يكون المتعلم بعد الانتهاء من دراسة مقرر الصف الثالث الثانوي (القسم الأدبي) قادراً على:

١ – التَعَرُّف على مفاهيم مبدأ العد والتباديل والتوافيق وخواصها .

٢ – التَعَرُّف على التوزيعات التكرارية وتمثيلها بيانياً .

٣ – استخدام بعض الرموز الإحصائية

٤ – حساب مقاييس التشتت .

٥ – إيجاد معامل الارتباط .

٦ – التَعَرُّف على خط الانحدار واستخدامه في التنبؤ .

٧ – التَعَرُّف على التكامل غير المحدد وخواصه .

٨ – إيجاد مساحات بعض المناطق بالتكامل .

جدول توزيع الحصص على الوحدات

م	عنوان الوحدة	عدد الحصص
١	مبدأ العدّ	١٥
٢	الإحصاء	١٨
٣	التكامل	١٤
	المجمـــــوع	٤٧

http://e-learning-moe.edu.ye

الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي

$\in$	عنصر في / ينتمي إلى
$\notin$	ليس عنصراً في / لا ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز $\subseteq$)
$\not\subset$	ليست مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز $\not\subseteq$)
$\{ ا ، ب ، جـ ، \ldots \}$	حاصرتا المجموعة
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$ ، $\{\ \}$	المجموعة الخالية (فاي)
$س_{\sim}'$	متممة المجموعة $س_{\sim}$
$س_{\sim} / ص_{\sim} = س_{\sim} - ص_{\sim}$	الفرق بين المجموعتين $س_{\sim}$ ، $ص_{\sim}$.
$س_{\sim} \times ص_{\sim}$	حاصل ضرب المجموعتين $س_{\sim}$ ، $ص_{\sim}$. « الجداء الديكارتي » .
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية .
$ص_{\sim}$	مجموعة الأعداد الصحيحة (ومنها $ص_{\sim}^{+}$ ، $ص_{\sim}^{-}$)
ك	مجموعة الأعداد الكسرية
د	مجموعة الأعداد النسبية (ومنها $د^{+}$ ، $د^{-}$)
ح	مجموعة الأعداد الحقيقية (ومنها $ح^{+}$ ، $ح^{-}$)
[ا ، ب]	الفترة المغلقة ا ، ب .
] ا ، ب [	الفترة المفتوحة ا ، ب .
[ا ، ب]	الفترة نصف المفتوحة من جهة ا .
[ا ، ب]	الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .
π	النسبة التقريبية (باي) .
$>$	أكبر من
$<$	أصغر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
$\leq$	أصغر من أو يساوي
هـ	الأساس الطبيعي (وهو عدد حقيقي غير نسبي)
لط	لوغاريثم العدد الطبيعي
$=$	يساوي .
$\not>$	ليس أصغر من

http://e-learning-moe.edu.ye

$\not<$	ليس أكبر من .
$\neq$	لا يساوي
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	عمودي على
$\not\perp$	ليس عموديا على
$\approx$	يساوي تقريباً
$\equiv$	يكافئ
$\sim$	يشابه
$\cong$	يطابق
$\because$	بما أن
$\therefore$	إذن
$\overline{أب}$	القطعة أ ب
$\lvert أب \rvert$	طول القطعة أ ب .
$\overleftarrow{أب}$	الشعاع الذي بدايته النقطة أ .
$\overleftrightarrow{أب}$	المستقيم أ ب (الذي يمر بالنقطتين أ ، ب) .
$\propto$	يتناسب طردياً
مجـ	المجموع
Δ	المثلث
$\angle$ أ ب جـ	الزاوية أ ب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .
ق($\angle$ أ ب جـ)	قياس الزاوية أ ب جـ .
جا	جيب الزاوية
جتا	جيب تمام الزاوية
ظا	ظل الزاوية
ظتا	ظل تمام الزاوية
قا	قاطع الزاوية
قتا	قاطع تمام الزاوية
[س]	أكبر عدد صحيح أصغر من س «صحيح س»
$\pm\infty$	موجب أو سالب ما لا نهاية
$\lvert \quad \rvert$	القيمة المطلقة

http://e-learning-moe.edu.ye

$\forall$	لكل
$\exists$	يوجد على الأقل
$\sim$ ا	نفي ا
$\Rightarrow$	يقتضي
Δ ، δ	دلتا
$ح_د$	الحد النوني للمتتالية (الحد العام)
$< ح_د >$	متتالية حسابية أو هندسية حدها العام $ح_د$
3	أبسِلُون
$\wedge$	(و) رمز العطف
$\vee$	(أو) رمز الفصل
$ت^{-1}$	التطبيق العكسي للتطبيق ت
$ت_1 \circ ت_2$	تركيب تطبيقين $ت_1$ ، $ت_2$
$\sqrt[د]{ا}$	الجذر النوني للعدد ا
حـ	حدودية
$ط^*$	$ط / \{ . \}$
$صـ^*$	$صـ / \{ . \}$
$د^*$	$د / \{ . \}$
$ح^*$	$ح / \{ . \}$
$\overrightarrow{اب}$	المتجه اب
($و\overrightarrow{ا}$ ، $و\overrightarrow{ب}$)	الزاوية الموجهة ضلعها الابتدائي $و\overrightarrow{ا}$ وضلعها النهائي $و\overrightarrow{ب}$
$\overrightarrow{ف}$ (س ، ص)	المتجه القياسي
$\overrightarrow{ب}$	المتجه الصفري
$\lvert \overrightarrow{ف} \rvert$	طول متجه
$\overrightarrow{سـ}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور السيني الموجب
$\overrightarrow{صـ}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور الصادي الموجب
$\overrightarrow{ف_1} \bullet \overrightarrow{ف_2}$	الضرب الداخلي لمتجهين
ك $\bullet \overrightarrow{ف}$	ضرب متجه بعدد حقيقي
نهـا	نهاية
د(س)	مشتقة الدالة د (س)
ر	رو (معامل ارتباط سبيرمان)

http://e-learning-moe.edu.ye

منهجية إعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه

عند إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية، رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب إستراتيجية مناهج هذه المرحلة التي استندت إلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإلى الأسس العامة للتربية ، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرائق والأساليب كما ورد في وثيقة المناهج من ناحية ، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى ، وكل ذلك مبنيٌ على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية ، ولهذا ظهرت هذه المعالم واضحة في كتب الرياضيات لهذه المرحلة ، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة مع مراعاة الدقة والصرامة العلمية، والاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها ، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط ، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي، إضافة إلى التعزيز بالتدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة .

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات وشبه المحسوسات، واقترب أكثر فأكثر إلى العمليات التجريدية ، إذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى عالٍ ، منها : التصنيف، والمقارنة، وتكوين المفاهيم والعلاقات، والتجريد والتعميم، والتفسير والترجمة . والطالب في هذه المرحلة يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الأستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية مما يساعد على حل المشكلات بشكل أعمق، وبما ينمي لدى الطلبة جوانب الإبداع والابتكار.

٣ – جرت ـ قدر الإمكان ـ محاولة لتوظيف المادة التعليمية ، في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إلا نوع من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم إلى جانب العادات الإيجابية وتنمية الانتماء . والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال

http://e-learning-moe.edu.ye

تقديم المواضيع بشكل منسق وعرض بعض جماليات المادة هنا وهناك .

٤ – مراعاة الفـروق الفرديـة حيث عرضت المادة بتسلسل من خلال قدرٍ كافٍ مـن الأمثلة ، والتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجاً متصاعداً في الصعوبة . وتخدم التمارين والمسائل في كل بند تثبيت المادة التعليمية، كما تهدف إلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات والرموز المناسبة ، دون المبالغة في دقتها الرياضية، ومراعاة الربط بالتطبيقات دون خلل في تعميماتها المجردة، وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

أ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية تصنيف وتجريد .

ب) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم .

جـ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ،وهذه عملية تصنيف وتمييز، بل عملية تعميق، ومن خلال ذلك تتم صياغة التعاريف بعناية .

٦ – معالجة البرهنة من خلال الحصول على عدد من المبرهنات وبرهانها وحل بعض التمارين والمسائل عليها، ويتم ضمن ذلك تحديد المعطيات (المقدمات) والمطالب (النتائج) وقد تم الاهتمام في هذا المجال بتطوير أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه . وعُني هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية والتحليلية . وقد ظهرت البرهنة لأول مرة في الصفوف (٧– ٩) من مرحلة التعليم الأساسي وقد سارت فكرة البرهنة في تلك المرحلة على النحو التالي :

أ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات ، وقد مُهّد لذلك في الصفوف الدنيا من مرحلة التعليم الأساسي واستمر في الصفوف العليا من تلك المرحلة .

ب) فهم البرهان والخطوات المنطقية (كان يتركز هذا في الصف السابع) .

جـ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا الأمر مشترك في الصفين السابع والثامن .

http://e-learning-moe.edu.ye

د) إقامة البرهان بشكل ذاتي ، حيث يتمكن الطالب بنفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل ، ويبدأ هذا من الصف الثامن .

وفي المرحلة الثانوية يتم الارتقاء بالبرهنة من حيث الأساليب والأفكار، وفي هذا المجال لا بد من التأكيد على نموذج عرض البرهان ، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة .

٧ – إعطاء أهمية للمهارات بشكل موازٍ لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات، بحيث لا يطغى واحد على الآخر. وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

ب) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة (وهي مرحلة سابقة للمهارات) .

جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا إتمام المهارة .

تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر إن للمهارة جانبين هما الدقة والسرعة. والعناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلا أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى ، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات. ومن المهارات التي يجب أن يتقنها طالب هذه المرحلة استخدام الآلات الحاسبة واستخدام الجداول والرسوم البيانية وتفسيرها ... وما شابه ذلك .

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، وأساليب التفكير الرياضي خاصة. ويعتبر ما سبق تقديمه في مرحلة التعليم الأساسي من شرح وتوظيف لإستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد يمتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة في كل من الجبر والهندسة ، بل وفي كافة الفروع والمجالات الرياضية. ويتمثل حل المسألة في الخطوات التالية :

أ) حصر المعطيات .

http://e-learning-moe.edu.ye

ب) تحديد المطلوب .

جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل، ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات اللازمة للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد ، وفي هذه الخطوة يتم تنمية الابداع والابتكار .

د) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

هـ) مراجعة الحل (التحقق من صحة الحل) : وهو مطلب تربوي، أكثر من كونه علميًا ، إذ يساعد على تنمية القدرة على النقد الذاتي، حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أولاً : أُعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلا أن المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم . إن المنهاج ينعكس انعكاساً تاماً في الكتاب ، وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ دروسه اليومية. وهذا لا يعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي وكذلك كتاب التمارين . كما يوصي المدرس بالمراجع العلمية والتربوية الأخرى ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية ، وقد أوردنا عنوانين بعض المراجع في الدليل في نهاية كل وحدة.

ثانياً : يعتبر الكتاب المصدر الرئيس للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب

http://e-learning-moe.edu.ye

المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفاً ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المادة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعليمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة خارج الصف، إذا كان وقت الحصص لايستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العملية . ومما سبق نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين تقدم للطالب مفهوم خاطئ، وللاسف لازال يمارسه كثير من المدرسين دون إدراك .

ثالثاً : يقدّم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها، ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما هي ثم يطلب نقلها إلى الكرسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو من كتاب التمارين أو يعدها بنفسه .

رابعاً : يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بحيث يمكن أن تغطى المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد ضمن ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية .

هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجيةً واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة .

منهجية إعداد كتاب التمارين وكيفية استخدامه

من ضمن استراتيجات إعداد المواد التعليمية للمرحلة الثانوية، إعداد كتب الأنشطة والتمارين لكل مادة، ولهذا فقد جاء إعداد كتاب التمارين لمادة الرياضيات تحقيقاً لأهداف تعليمية مكملة للكتب المدرسية . وقد روعي عند إعداد كتاب التمارين أن يحتوى على ما يلي :

١ – إضافة إلى تمارين ومسائل كل بند في الكتاب المدرسي فقد تم إعداد بعض التمارين والمسائل التي وضعت تحت رقم البند المعني ، وإن كانت تمارين الكتاب المدرسي تغنى عن هذه التمارين، إلا أن ما ورد في كتاب التمارين هو زيادة

http://e-learning-moe.edu.ye

التمرن، واحتياطي لمن يريد الاستزادة من التمارين بغرض التمكن من المادة .

٢ – وضعت في نهاية كل وحدة مجموعة من التمارين العامة والمسائل التي تربط محتوى الوحدة ككل، لتساعد على فهم أعمق بين بنودها، ونظرة شمولية بين مفاهيمها ويجعلها أكثر ثباتاً في أذهان الطلبة .

٣ – اختبار الوحدة، وهو متناغم مع اختبار الوحدة الذي في الدليل، قد وضعا وفقاً لأهداف الوحدة .

واستناداً لماسبق ، فقد خطط أن يستخدم كتاب التمارين على النحو التالي :

أولاً : يمكن الاكتفاء بتمارين ومسائل الكتاب المدرسي بعد كل بند ، ويستعان بما في كتاب التمارين فقط وقت الضرورة ، أو لإعداد بعض الاختبارات أو خطوات التقويم نهاية كل بند .

ثانياً : نهاية كل وحدة يكلّف الطلبة بحل عدد كاف من التمارين العامة والمسائل، يقوم المدرس باختيارها بدقة، ويمكن اعتبارها مراجعة عامة للوحدة.

ثالثاً : يطلب المدرس من الطلبة حل اختبار الوحدة كواجب منزلي ، وقبل يومين أو ثلاث من الاختبار الذي سيتم إجراؤه . وبالتالي يتيح فرصة كافية للطلبة للمراجعة والاستفسار عن أي صعوبات تواجههم .

إن الهدف الأساسي لكتاب التمارين هو تمكين الطلبة من المادة وتثبيتها وتعميقها لديهم .

http://e-learning-moe.edu.ye

منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للمرحلة الثانوية منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع إستراتيجية مناهج هذه المرحلة؛ ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية، وتراعي خصوصية المواضيع ولا تلغي إبداع المدرس في سلوكه التدريسي، الذي يمكنه من إبراز شخصيته مع أخذه بعين الإعتبار خصوصيات طلبته. ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية والتي يجب الأخذ بها عند استخدام تلك الأدلة :

١ – الحرص على أن تخطط جميع الوحدات ، بل وجميع الدروس ، إلا أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا وضع تشكيل كل وحدة على النحو التالي :

أ) جدول بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب، وعلى المدرس ألا يزيد كثيراً أو ينفقص كثيراً عن هذا العدد المقترح من الحصص، حتى لاتنتهي السنة المدرسية وهو لم يغط المقرر الدراسي .

ب) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها. وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما أنها منسجمة ـ إن لم تكن متطابقة ـ مع وثيقة المناهج لكل وحدة .

جـ) مقدمة للوحدة وتحتوي على فكرة عامة لمكونات الوحدة الدراسية، على لمحة تاريخية ، ومفاهيم وتعميمات الوحدة، وبعض الأخطاء الشائعة إذا دعت الضرورة لذكرها وسبل علاجها ، وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولا يجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

د) أهداف لكل درس، مع ذكر العدد المقترح للحصص ، كما تم التعرض لتنفيذ الدرس بتحديد عنوان عام لكل حصة دراسية، ثم جاء تقويم الدرس ، وبعد ذلك إرشادات وإجابات التمارين والمسائل .

http://e-learning-moe.edu.ye

هـ) كما سبقت الإشارة، فإن اختبار الوحدة الذي في كتاب التمارين يعطى كواجب منزلي، وتهيئة لاختبار الوحدة الحقيقي الذي يُعطي من الدليل، ويفضل أن يعد المدرس اختباراً آخراً وفقاً لذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة، ثم يقوم المدرس بتحليل إجابات الطلبة على أن تتم معالجة الأخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ – كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلا مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ، ولهذا على المدرس أن يكيف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف ، وبما يتيح له الإبداع دون الخروج عن أهداف المنهاج . ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءة متمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة بأهدافها وخطواتها التمهدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من عنده، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه مستعيناً بالتقويم الذي في الدليل لكل بند .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ، وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها ، وأن يوظفه بشكل يومي ، ولا يقتصر استخدامه ـ كما تعود كثير من المدرسين ـ على تحديد الواجبات والتمارين .

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطيه المدرس عناية كبيرة ، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب ، منها تسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً ، واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة

http://e-learning-moe.edu.ye

وبحيث يشعر الطلبة المتوسطون بشيء من تحقيق الذات. وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلته وتمارينه، وهنا نوجه نظره إلى كتاب التمارين. وعلى المدرس أن يضع من ضمن أهداف الدرس: إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم، والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين.

٦ – على المدرس أن ينفذ بشكل أو آخر كل ما يشار إليه من أساليب لتنمية القدرات العقلية، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة.

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعينة، إلا في البرهنة، ولهذا على المعلم، وكلما أتيحت له الفرصة، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في مرحلة التعليم الأساسي من إستراتيجية حل المسألة، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها.

٨ – ينصح المدرس بأن يوجه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية من حيث العرض الكتابي، يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظاميته وجمال عرضه.

وبعد عرض المنهجيات الثلاث لإعداد الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ودليل المعلم، فإن على المدرس تتبع هذه المنهجيات في عمله التدريسي حصة حصة وبنداً بنداً، ويحرص على تطبيقها في الممارسة الفعلية للتدريس.

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الأولى مبـــدأ العـــــــد

جدول توزيع الحصص

البنـــد	الموضـــوع	عدد الحصص
١ – ١	مـــبـــدأ الـــعـــد	٣
١ – ٢	الـــتـــبـــاديـــل	٥
١ – ٣	الـــتـــوافـــيـــق	٥
١ – ٤	اخـــتـــبـــار الـــوحـــدة	٢
المجموع		١٥

أهداف الوحدة :

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يتعرَّف مبدأ العدّ .

٢ – يستخدم مبدأ العد في حل بعض المسائل الحياتية .

٣ – يُعرِّف مضروب عدد صحيح موجب .

٤ – يحسب مضروب عدد صحيح موجب .

٥ – يتعرَّف تباديل $د$ من العناصر مأخوذه كلها .

٦ – يكتب قانون التباديل ويستخدمه في حساب تبديل $د$ من العناصر مأخوذة $ر$ في كل مرة ، $ر \geq د$.

٧ – يعرّف توافيق $د$ من العناصر .

٨ – يكتب قانون التوافيق ويستخدمه في حساب توافيق $د$ من العناصر مأخوذة $ر$ في كل مرة ، $ر \geq د$.

٩ – يحل مسائل تطبيقية .

http://e-learning-moe.edu.ye

الـمـقـدمـــــــة

في هذه الوحدة ندرس مبادئ التحليل (الحساب) التوافقي نتناول مبدأ العد محاولين بعد ذلك توظيفه في البندين التاليين له وهما: دراسة التباديل (الاختيار مع الترتيب) لمجموعة منتهية من العناصر التي عددها د مأخوذة كلها أو بعض منها، ودراسة التوافيق (الاختيار بدون ترتيب) لـ ر عنصراً من مجموعة عدد عناصرها د حيث د ≤ ر .

مهدنا لكل بند ببعض أمثلة حسية من واقع الحياة ساعدت على استيعاب معنى التبديلة والتوفيقة .

وكلما انتهينا من دراسة بند من بنود هذه الوحدة أوردنا عليه مجموعة من التمارين والمسائل التقويمية، كما اختتمنا الوحدة باختبار لحله ومناقشته مع الطلبة .

لمحة تاريخية :

منذ القدم والإنسان مهتم بحساب عدد إمكانات حدوث ظاهرة معينة ، كما أهتم بعدد إمكانات ترتيب وتوزيع الجيش على المواقع المختلفة أو عدد الطرق الممكنة لتحصيل الضرائب .

وفكرة التباديل التي سيدرسها الطالب ظهرت للمرة الأولى لدى علمائنا اللغويين وعلى رأسهم الخليل بن أحمد الفراهيدي (١٠٠ – ١٧٠هـ) أستاذ سيبويه، عندما بدأ بتأليف المعجم .

وقد جاء في كتابه: أعلم أن الكلمة الثنائية تتعـرف على وجهـين مثل: قد – د ق، شد – دش ، والكلمة الثلاثية تتعرف على ستة وجوه تسمى مسدوسة. والكلمة الرباعية تتعرف على أربعة وعشرين وجهاً وذلك أن حروفها وهى أربعة أحرف تضرب في وجوه الثلاثي الصحيح وهي ستة أوجه فتصير أربعة وعشرين وجهاً، ويكتب مستعمـلها ويلغى مهملها وذلك مثل: عبقر ، عقرب ، عقبر، عبرق . . . إلخ .

ونجد أن الخليل قد استعان بشكل صريح بحساب التباديل والتوافيق من سبيل إعداد علم المعاجم العربي مستخدماً ترشيد (عقلنة) الممارسات التجريبية

http://e-learning-moe.edu.ye

للمعجميين، وتوصل إلى تعداد كلمات اللغة بطريقة وافية ، وقد قال الخليل إن التراتيب من ر إلى ر حرفاً يعطينا مجموعة المصادر وبالتالي الكلمات من اللغة الممكنة وعدد التراتيب هو : $ل_{ر}^{د} = \frac{ل^{د}}{ل^{(د-ر)}}$

حيث د = ٢٨ (عدد أحرف الأبجدية)، ر عدد أحرف المصدر للكلمة المراد ترتيبها (٥ ≤ ر < ١) ولقد بدأ الخليل بتأليف المعجم بحساب عدد التوافيق دون تكرار لأحرف الأبجدية من ر إلى ر أحرف ثم حسب عدد التبديلات من كل مجموعة من ر أحرف وبتعبير آخر قام بحساب :

$ل_{ر}^{د} = ل^{ر} \binom{د}{ر} = ل^{ر} \, و_{ر}^{د}$.

حيث د عدد أحرف الأبجدية ، ر ∈ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}.

وقد أعطى العالم الكرخي (... ــ ٤٢١هـ) القاعدة :

$$و_{ر}^{د} = و_{ر-١}^{د-١} + و_{ر}^{د-١}$$

أو بصورة أخرى $\binom{د}{ر} = \binom{د-١}{ر-١} + \binom{د-١}{ر}$.

كما أن لعالم الرياضيات العربي نصير الدين الطوسي (١٢٠١ – ١٢٧٤م) باعاً طويلاً في حساب عدد الإمكانات باستخدام التباديل والتوافيق .

واهتم كاردان (١٥٠١ – ١٥٧٦) بحساب عدد الإمكانات بطريقة تسمى المبدأ الأساسي للعد .

وفي عام ١٦٥٣م نشر الفرنسيان : فيرمان (١٦٠١ – ١٦٦٥م) وباسكال (١٦٢٣ – ١٦٦٢م) أول نظرية متكاملة عن العد والاحتمالات .

خلفية علمية :

أولاً : المفاهيم والمصطلحات والرموز :

– المبدأ الأساسي للعد .

– تباديل د من الأشياء (العناصر) مأخوذة كلها $ل_{د}^{د}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

– مضروب العدد $د$ ، $لـ_د$ ، $د \in ط^*$.

– تباديل $د$ من الأشياء (العناصر) مأخوذة $ر$ في كل مرة $ل_{د\ ر}$.

– توافيق $د$ من العناصر مأخوذة $ر$ في كل مرة $\binom{د}{ر}$ ، أو $و_{د\ ر}$.

ثانياً : حقائق وتعميمات :

(١) $لـ_د = د\ لـ_{د-١}$.

$= د(د-١)\ لـ_{د-٢}$.

$= د(د-١)(د-٢) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$.

(٢) $لـ_١ = ١$ ، $لـ_{نـ} = ١$

(٣) $ل_{د\ ر} = د(د-١)(د-٢)\ldots(د-ر+١)$.

(٤) $ل_{د\ د} = د(د-١)(د-٢)\ldots(د-ر+١) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$
$= لـ_د$

(٥) $و_{د\ ر} = \frac{لـ_د}{لـ_ر\ لـ_{(د-ر)}} = \frac{ل_{د\ ر}}{لـ_ر}$ ، $و_{د\ د} = ١$ ، $و_{د\ ٠} = ١$.

(٦) $و_{د+١\ ر} = و_{د\ ر} + و_{د\ ر-١}$

(٧) $و_{د\ ر} = و_{د\ د-ر}$

المبدأ الأساسي للعد :

نقول عن مجموعة ما بأنها قابلة للعد في حال استطعنا تطبيقها على $ط^*$ بواسطة تقابل ، أي نستطيع ترقيم عناصرها بهدف عدّها ، ومسائل العد تشكل فرعاً هاماً من أبحاث الرياضيات ، وهناك طرق منظمة تساعد على إيجاد عدد الطرق الممكنة لإجراء عملية مكونة من عدة خطوات أو لإجراء عدة عمليات معاً أو متتالية بديلاً عن استخدام العد المباشر وذلك لتوفير الوقت والجهد .

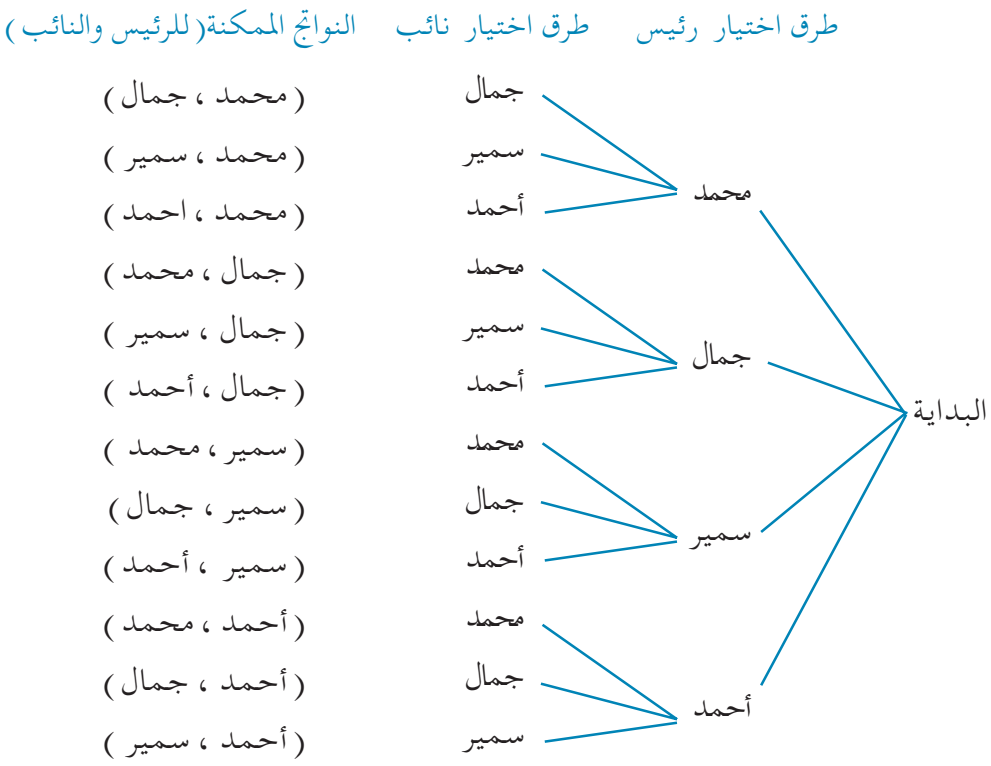
http://e-learning-moe.edu.ye

وتحتوي طرق العدّ أيضا على موضوعات مثل التحليل التوافقي والتباديل وكذلك التحليل العاملي (المضاريب) .

ولتوضيح مبدأ العد نعطي المثال الآتي :

افترض أن مجلس إدارة إحدى المؤسسات يتكون من أربعة أشخاص هم : محمد ، جمال ، سمير ، أحمد وأردنا اختيار رئيس ونائب للرئيس منهم .

فإنه لمعرفة عدد الطرق الممكنة للقيام بهذا الاختيار بالعد المباشر ، يلزمنا كتابة جميع النواتج الممكنة ثم عدّها، والشكل الآتي (يسمى مخطط الشجرة) يوضح طرق اختيار الرئيس ونائبه بطريقة أبسط، والنواتج الممكنة هي :



عدد طرق اختيار الرئيس أربع طرق ويقابلها كل منها ثلاث طرق لاختيار نائب، وبذلك فإن عدد النواتج الممكنة ١٢ طريقة ، ونلاحظ أن الاختيار (محمد، جمال) .

http://e-learning-moe.edu.ye

يختلف عن الاختيار (جمال ، محمد) فالأول يعني أن محمد الرئيس وجمال نائبه أما الثاني فيعني جمال الرئيس ومحمد نائبه .

إن اللجوء للعدّ والاستعانة بمخطط الشجرة لمعرفة عدد النواتج الممكنة ليس بالأمر اليسير دائماً في حالة ما يكون عدد العناصر كبيراً جداً ، ونورد هنا كيفية عملية الاختيار بطريقة أخرى . ففي المثال السابق نجد أن اختيار رئيس ونائبه من بين الأعضاء الأربعة يتم في عمليتين متتاليتين :

الأولى : هي عملية اختيار الرئيس وتتم بطرق عددها اربعة حيث يمكن اختياره من الأشخاص الأربعة .

الثانية : هـــي عملية اختيـــار نائـب للرئيس وتتم بطرق عددها ثلاثة حيث يمكن اختياره من الأشخاص الثلاثة الباقيين بعد اختيار الرئيس؛ أي أن مقابل كل طريقة لاختيار الرئيس توجد ثلاث طرق لاختيار النائب .

وعليه يكون عدد طرق اختيار رئيس ونائبه: ٤ × ٣ = ١٢ طريقة .

ومن تلك الحالة نستطيع الوصول إلى الصورة العامة إذا كان عدد طرق إجراء عملية ماهو $د_1$ ، وعدد طرق إجراء عملية أخرى هو $د_2$.

فإن عدد الطرق الممكنه لإجراء العمليتين معاً (أو على التوالي) = $د_1 \times د_2$.

ويمكـن تـعـمـيـم ماسـبـق عنـــد إجـــراء م مـــن العمليـــات فمثلاً : إذا تمت عمليات $ع_1 ، ع_2 ، ... ، ع_م$ وعددها م على التوالي ، وكان عدد إمكانات كل منها على الترتيب هو : $د_1 ، د_2 ، ... ، د_م$ ، فإن : عدد إمكانات العملية المركبة من هذه العمليات على التوالي هو: $د_1 \times د_2 \times ... \times د_م$.

تباديل د من العناصر مأخوذه كلها في كل مرة :

لتكن $س_ن = \{ ا ، ب ، جـ \}$ يُسمى كل ترتيب للعناصر ا ، ب ، جـ تبديلاً لعناصر المجموعة $س_ن$ ، وتكون جميع التبديلات المختلفة لعناصر المجموعة $س_ن$ هي جميع الصور المختلفة لترتيب عناصرها ، وهذه التبديلات هي :

http://e-learning-moe.edu.ye

أ ب جـ ب أ جـ جـ أ ب .

أ جـ ب ب جـ أ جـ ب أ .

ونجد أن عدد التبديلات الممكنة لعناصر المجموعة س هي ٦ .

ويمكننا استخدام مبدأ العد للحصول على عدد تباديل عناصر المجموعة س . فالمكان الأول في التبديل يمكن تعبئته بطرق عددها ٣ وذلك بوضع أ أو ب أو جـ ، والمكان الثاني يمكن تعبئته بطريقتين : فإذا كان أ في المكان الأول فإننا نضع في المكان الثاني ب أو جـ ، والمكان الثالث يمكن تعبئة بطريقة واحدة فقط؛ وعليه يكون عدد التبديلات الممكنة لعناصر س هي ٣×٢×١ = ٦ ؛ تسمى الصورة ٣×٢×١ مضروب العدد ٣ ويرمز لها بالرمز ٣! أو $\underline{\underline{ل}}_{٣}$ أيّ أن : $\underline{\underline{ل}}_{٣}$ = ٣ × ٢ × ١ .

بالمثل إذا كان عدد عناصر المجموعة س هي ٤ ، فإن عدد التبديلات الممكنة لعناصرها يساوي $\underline{\underline{ل}}_{٤}$ = ٤×٣×٢×١ ، وبصورة عامة :

إذا كان د عدداً صحيحاً غير سالب فإن عدد تباديل عناصر مختلفة عددها د يساوي $\underline{\underline{ل}}_{د}$. (ويقرأ مضروب د) حيث :

$\underline{\underline{ل}}_{د}$ = د (د − ١) (د − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ ، د ∈ صـ$^{*}_{+}$.

ملحوظة :

إذا كان كل من أ ، ب ∈ صـ$^{*}_{+}$ ، وكان $\underline{\underline{ل}}_{أ}$ = $\underline{\underline{ل}}_{ب}$ ، فإن أ = ب .

عدد تباديل د من الأشياء المختلفة مأخوذة ر عنصراً من كل مرة :

لتوضيح ذلك نفرض أننا نرغب في تكوين الألفاظ ذات الثلاثة الأحرف من الحروف الخمسة س ، ص ، ع ، ل ، م لذلك نتصور أنه لدينا ثلاثة أماكن خالية ، ونريد أن نرتب فيها هذه الحروف الخمسة بجميع الطرق المختلفة . فإنه يمكن أن نشغل المكان الأول بأخذ حرف من هذه الحروف الخمسة بطرق مختلفة عددها ٥ ومتى شغل المكان الأول بأية طريقة من هذه الطرق يمكن شغل المكان الثاني بأخذ حرف من الأحرف الأربعة الباقية بطرق عددها ٤ وكذلك يمكن شغل المكان الثالث بطرق عددها ٣ : | ٥ | ٤ | ٣ | ، علماً بأنه لايجوز تكرار أي حرف مرتين في الكلمة الواحدة .

http://e-learning-moe.edu.ye

وبناء على قاعدة مبدأ العد يكون عدد طرق شغل الأماكن معاً هو : ٥×٤×٣ .

إذن عدد طرق ترتيب خمسة أشياء مأخوذة ثلاثة يساوي ٥ × ٤ × ٣ ويرمز عادة لعـدد طـرق ترتيب أو تبديل خمسـة أشياء مختلفـة مأخوذه ثـلاثة ثلاثة بالرمـز $ل^{٥}_{٣}$ ، وتقرأ « خمسة تباديل ثلاثة » ، ويرمز الحرف ل لكلمة تباديل .

∴ $ل^{٥}_{٣}$ = ٥×٤×٣= ٦٠ ، بالمثل $ل^{٥}_{٤}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ .

و $ل^{٧}_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ .

وعلى العموم يستعمل الرمز $ل^{د}_{ر}$ للدلالة على عدد تباديل د من الأشياء المختلفة مأخوذة راءً راءً حيث ر لاتزيد على د . (ر ≤ د) .

إيجاد قيمة $ل^{د}_{ر}$:

نفرض أنه توجد حروف مختلفة عددها د ، وتوجد أماكن خالية عددها ر .

إذن يمكن شغل المكان الأول بطرق عددها د ، وبعد شغل المكان الأول بأحد الحروف يبقى د – ١ من الحروف .

إذن يمكن شغل المكان الثاني بطرق عددها د – ١ ، أي : د – (٢ – ١).

وبعد شغل المكان الثاني بأحد الحروف يبقى د – ٢ من الحروف ،إذن يمكن شغل المكان الثالث بطرق عددها د – ٢ ، أي : د – (٣ – ١) .

وعلى العموم يمكن شغل المكان الرائي بطرق عددها د – (ر – ١) ، أي : د – ر + ١ .

ومن حيث أن جميع طرق شغل الأماكن مرتبط بعضها ببعض ينتج أن عدد الطرق التي يمكن أن تشغل بها الأماكن هي :

د (د – ١) (د – ٢) ... (د – ر + ١) أي أن :

$ل^{د}_{ر}$ = د (د – ١) (د – ٢) ... (د – ر + ١) .

وإن الرمز $ل^{د}_{ر}$ يدل على حاصل ضرب عوامل عددها ر تبدأ من د وكل عامل منها يصغر بقدر واحد عن سابقه .

ويلاحظ أن العامل الأخير في حاصل الضرب يزيد على الفرق بين د ، ر بقدر ١ ، فمثلاً:

http://e-learning-moe.edu.ye

$ل_{٧}^{١٢} = ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times \ldots \times (١٢-٧+١) = ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times \ldots \times ٦$.

وفي حالة ما إذا كان عدد الأشياء يساوي عدد المواضع ، أي $ر = د$ يكون :

$ل_{د}^{د} = د (د - ١) (د - ٢) \ldots (د - د + ١)$.

$= د (د - ١) (د - ١) \ldots ٣ \times ٢ \times ١$.

$= لـ د$.

فمضروب $د$ هو حاصل ضرب عوامل أولها $د$ ، وكل عامل ينقص عن سابقةبمقدار الوحدة (١) وآخر عامل في حاصل الضرب هو ١ .

مثال : $لـ ٦ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$.

إذا عدد تباديل ستة أشياء مختلفة في ستة أماكن يكون عدد الطرق = ٧٢٠ .

تأمل مايأتي :

$لـ ٨ = ٨ (٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١)$.

$= ٨ لـ ٧$.

أو $لـ ٨ = ٨ \times ٧ لـ ٦$.

أو $لـ ٨ = ٨ \times ٧ \times ٦ لـ ٥$ ... وهكذا .

$\therefore لـ د = د (د - ١) لـ د-٢$.

كذلك لدينا

$ل_{ر}^{د} = د (د - ١) (د - ٢) \ldots (د - ر + ١)$.

$$= \frac{د (د - ١) (د - ٢) \ldots (د - ر + ١) \; لـ د-ر}{لـ د-ر} .$$

$$= \frac{د (د - ١) (د - ٢) \ldots (د - ر + ١) (د - ر) (د - ر - ١) \ldots ٣ \times ٢ \times ١}{لـ د-ر} = \frac{لـ د}{لـ د-ر}$$

نتيجة : لاثبات أن : $لـ ٠ = ١$ نقول :

$\because ل_{ر}^{د} = \frac{لـ د}{لـ د-ر}$ ، وبوضع $ر = د$ ينتج أن :

http://e-learning-moe.edu.ye

$$ل_{د} = \frac{ل_{د}}{ل_{د-د}} = \frac{ل_{د}}{ل_{٠}}$$

$$\therefore ل_{د} = \frac{ل_{د}}{ل_{٠}} \Leftarrow ل_{٠} = \frac{ل_{د}}{ل_{د}} = ١ .$$

تعلم أن عدد تباديل د من الأشياء المختلفة مأخوذة كلها هو: $ل_{د}$.

وعدد تباديل د من الأشياء المختلفة مأخوذة ر في كل مرة هو :

$$ل_{ر} = \frac{ل_{د}}{ل_{د-ر}}$$

ماذا لو تشابه بعض هذه الأشياء ؟

للإجابة عن هذا السؤال ، نعتبر أن المطلوب هو إيجاد عدد تباديل أحرف كلمة (حزيز) على سبيل المثال :

عدد تباديل الحروف الأربعة = $ل_{٤}$ = ٢٤ تبديلة.

ولكن في حالتنا هذه ستتطابق بعض التبديلات لعدم التمييز بين الحرفين : ز ، ز ،

فإذا رمزنا لهما بالرمزين : $ز_{١}$ ، $ز_{٢}$ ، فإن :

($ز_{١}$ ، ح ، ي ، $ز_{٢}$) ، ($ز_{٢}$ ، ح ، ي ، $ز_{١}$) . سيتطابقان ويظهران بصورة: (ز ، ح ، ي ، ز) ، (ز ، ح ، ي ، ز) .

وحيث أن عدد تباديل الحرفين المتشابهين = $ل_{٢}$ = ٢ .

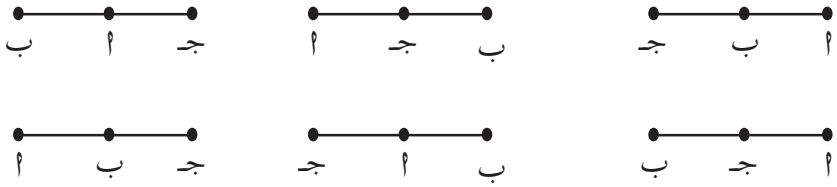
∴ عدد تباديل أحرف كلمة «حزيز» = $\frac{ل_{٤}}{ل_{٢}}$ = ١٢ وعموماً إذا تشابهت بعض العناصر ، فإننا نستخدم القاعدتين الآتيتين :

١) عدد تباديل د من الأشياء تضم م من الأشياء المتشابهة هو: $\frac{ل_{د}}{ل_{م}}$.

٢) وعدد تباديل د من الأشياء من ضمنها م من الأشياء المتشابهة، ل من الأشياء المتشابهة هو: $\frac{ل_{د}}{ل_{ل} ل_{م}}$ ... وهكذا .

ويوجد فرق بين عدد تباديل د من الأشياء على خط مستقيم (التبديل الخطي) وبين عدد تباديل د من الأشياء على دائرة (التبديل الدائري) ، فعدد تباديل ٣ أشياء على خط مستقيم = $ل_{٣}$ = ٣×٢×١=٦ ، لكن ماهو عدد تباديل ٣ أشياء على دائرة؟ [انظر لما يأتي] :

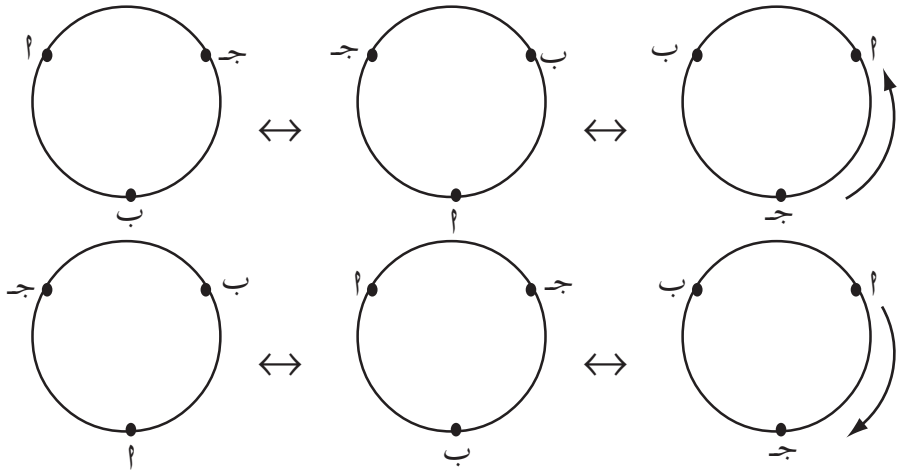
http://e-learning-moe.edu.ye



التبديل على خط مستقيم

نلاحظ عدد التبديلات على خط مستقيم = ٦ .

١) التبديل على دائرة (بدون تثبيت أية نقطة) :



التبديل على دائرة

نلاحظ عدد التبديلات على دائرة = ٢ فقط .

لأن التبديلات الثلاث الأولى واحدة ، التبديلات الثلاث الثانية واحدة .

أي أن تباديل ٣أشياء على دائرة = $\frac{\text{ل}_{٣}}{٣}$ = ٢ .

وبوجه عام ، عدد تباديل د من الأشياء على دائرة = $\text{ل}_{\text{د}-١}$.

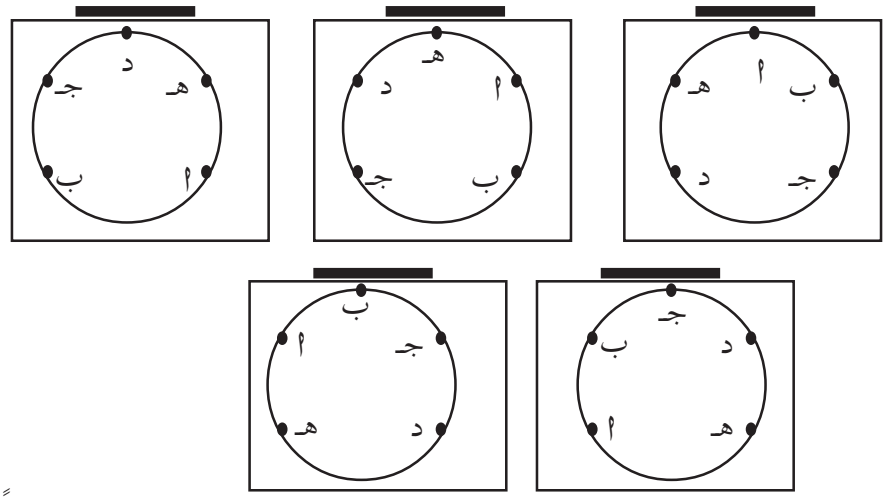
٢) التبديل على دائرة (بتثبيت نقطة واحدة) :

إذا قمنا بتبديل د من الأشياء على دائرة بالنسبة لنقطة ثابتة محددة فإننا نتعامل مع تبديل خطي ويكون عدد التباديل $\text{ل}_{\text{د}}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

فمثلاً : بكم طريقة يمكن ترتيب ٥ تلاميذ على طاولة مستديرة بحيث يجلس أحدهم مجاوراً لشباك الغرفة ؟ (هناك شباك واحدفي الغرفة) .

الحـــل :



نجد أن هذه التبديلات جميعها مختلفة لأنه يجلس تلميذ مختلف مجاوراً للنافذة وعدد هذه التبديلات = لـ٥ = ١٢٠ .

التوافيق : (الاختيار دون ترتيب) :

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ر من العناصر من مجموعة بها ن عنصراً دون اعتبار للترتيب يُسمى عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة راء كل مرة .

إذا أمعنا النظر في هذا التعريف فإننا نلاحظ أن عدد التوافيق هذه ماهو إلاّ عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على ر من العناصر .

نرمز لعدد توافيق ن عنصراً مأخوذة ر كل مرة بالرمز $ت_{ر}^{ن}$ أو ($\binom{ن}{ر}$) .

ونلاحظ أن الفرق الأساسي بين التباديل والتوافيق هو في الترتيب فقط .

فمثلاً : ا ب جـ ، ب جـ ا تبديلان مختلفان للعناصر ا ، ب ، جـ بينما هما نفس التوفيقة .

مثال آخر :

إذا أراد الاتحاد العام لكرة القدم في اليمن إجراء مباريات ثنائية بين مجموعة فرق النوادي {الأهلي ، الزهرة ، الوحدة ، الشعب } . فإنه يضم هذه النوادي إلى مجموعات جزئية كل منها تحتوي على ناديين على النحو التالي :

http://e-learning-moe.edu.ye

١) { الأهلي ، الزهرة } . ٢) { الأهلي ، الوحدة } .
٣) { الأهلي ، الشعب } . ٤) { الزهرة ، الوحدة } .
٥) { الزهرة ، الشعب } . ٦) { الوحدة ، الشعب } .

نلاحظ أن عدد المجموعات الجزئية التي يستطيع الاتحاد تكوينها من هذه الأندية الأربعة هو ٦ . كما نلاحظ أن الترتيب الذي ضمن المجموعة الواحدة ليس له أهمية؛ إذ أن المباراة بين الأهلي والزهرة تعني أيضاً المباراة بين الزهرة والأهلي كل مجموعة من المجموعات الست السابقة تسمى توفيقة بين شيئين مختارين من بين أربعة أشياء .

ويكون عدد توافيق أربعة أشياء مأخوذة اثنين اثنين ($\binom{4}{2}$) .

ربما يتبادر إلى ذهنك السؤال الآتي :

مالعلاقة بين $ق_{2}^{4}$ ، $ل_{2}^{4}$ ؟

والجواب على ذلك هو :

إن التوافيق (الأهلي ، الزهرة) يمكن أن توضع على شكل تبديلين هما : (الأهلي، الزهرة) و (الزهرة ، الأهلي) وبالمثل يمكن إيجاد تبديلين لكل توفيقة من التوافيق الست المذكورة أي أن : $ق_{2}^{4} \times ٢ = ل_{2}^{4}$.

مثال آخر :

كم عدداً مختلفاً ينتج من ضرب ثلاثة أعداد من مجموعة الأعداد { ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } .

إن عدد الاختيارات (التوافيق) هو $ق_{3}^{5}$ حيث تحتوي كل توفيقة على ثلاثة أعداد مضروبة في بعضها البعض .

مثل : ٣ × ٧ × ٩ ، ٣ × ٤ × ٧ ، ... وهكذا أن التوفيقة ٣×٧×٩ يمكن أن ترتب بطرق عددها $ل_{3}^{3} = ل!$ وهذه التباديل هي :

{ ٣ × ٧ × ٩ ، ٧ × ٣ × ٩ ، ٧ × ٩ × ٣ ، ٣ × ٩ × ٧ ، ٩ × ٣ × ٧ ، ٩ × ٧ × ٣ }

وهذه صحيحة لكل توفيقة من التوافيق $ق_{3}^{5}$.

إذن : $ق_{3}^{5}$ × $ل!$ هو عدد تباديل مجموعة فيها خمسة عناصر مأخوذة ثلاثة أيّ أن :

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\text{ن}_{٣}\text{و}^{٥} \text{ ل}^{٣} = \text{ل}^{٥}_{٣} .$$

ان الأمثلة السابقة ومثيلاتها تقودنا بصورة عامة إلى مايلي :

بما أن ($\text{ح}^{\text{ر}}$) يعني عدد توافيق (اختيار) ح شيئاً مأخوذه ر كل مرة وبما أنه يوجد

$\text{ن}^{\text{ر}} \text{ ل}_{\text{ر}} = \text{ل}^{\text{ن}}$ من التباديل لكل اختيار فإنه :

$$\text{ح}^{\text{ر}}\text{و}_{\text{ر}} \text{ ل}^{\text{ن}} = \text{ح}^{\text{ر}} \text{ ل}_{\text{ر}} \text{ ومن ذلك نستنتج أن } \text{ح}^{\text{ر}}\text{و}_{\text{ر}} = \frac{\text{ح}^{\text{ر}} \text{ ل}_{\text{ر}}}{\text{ل}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ل ح}}{\text{ل ر ل ح} - \text{ر}} .$$

حيث ٠ ≤ ر ≤ ح .

ملاحظات :

١) في كتاب الطالب، ومن خواص التوافيق وجدنا أن : $\text{ح}^{\text{ر}}\text{و}_{\text{ر}} = \text{ح}^{\text{ح}-\text{ر}}\text{و}_{\text{ح}-\text{ر}}$.

ويقودنا ذلك إلى ما يأتي :

٢) $$\frac{\text{ح}^{\text{ر}}\text{و}_{\text{ر}}}{\text{ح}^{\text{ر}-١}\text{و}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ح} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} .$$

لإثبات ذلك :

$$\frac{\text{ح}^{\text{ر}}\text{و}_{\text{ر}}}{\text{ح}^{\text{ر}-١}\text{و}_{\text{ر}-١}} = \frac{\frac{\text{ل ح}}{\text{ل ر ل ح} - \text{ر}}}{\frac{\text{ل ح}}{\text{ل ر} - ١ \text{ ل ح} - \text{ر} + ١}} = \frac{\text{ل ح}}{\text{ل ر ل ح} - \text{ر}} \div \frac{\text{ل ح}}{\text{ل ر} - ١ \text{ ل ح} - \text{ر} + ١} .$$

$$= \frac{\text{ل ح}}{\text{ل ر ل ح} - \text{ر}} \times \frac{\text{ل ر} - ١ \text{ ل ح} - \text{ر} + ١}{\text{ل ح}} = \frac{\text{ل ر} - ١ \text{ ل ح} - \text{ر} + ١}{\text{ل ر ل ح} - \text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ل ر}^{-١} (\text{ح} - \text{ر} + ١) \text{ ل ح} - \text{ر}}{\text{ر ل ر} - ١ \text{ ل ح} - \text{ر}} = \frac{\text{ح} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}$$

http://e-learning-moe.edu.ye

٣) $\boxed{و_{ن+١} = ن و_{ن} + و_{ن-١}}$

لإثبات ذلك :

الطرف الأيمن $= و_{ن} + و_{ن-١} = \frac{ل ج}{ل ن \; ل ج - ن} + \frac{ل ج}{ل ن - ١ \; ل ج - ن + ١}$

$= \frac{ل ج}{ل ن \; ل ج - ن} + \frac{ل ج}{ل ن - ١ \; ل ج - ن (ج + ١ - ن)}$

$= \frac{ل ج (ج + ١ - ن) + ل ج \; ن}{ل ن \; ل ج - ن (ج + ١ - ن)}$

$= \frac{ل ج (ج + ١ - ن + ن)}{ل ن \; ل ج - ن (ج + ١ - ن)}$

$= \frac{ل ج (ج + ١)}{ل ن \; ل ج - ن (ج + ١ - ن)} = \frac{ل ج + ١}{ل ن \; ل ج + ١ - ن}$

$= و_{ن+١}$ = الطرف الأيسر .

$\therefore \; و_{ن+١} = ن و_{ن} + و_{ن-١}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

إرشادات طرائقية عامة :

ينبغي عند تدريس هذه الوحدة مراعاة مايأتي :

١) توظيف مواقف حياتية من بيئة الطالب عند تقديم كل من مبدأ العد والتباديل والتوافيق .
مثلاً عند تناول موضوع التباديل نختار مواقف يكون فيها الترتيب عاملاً أساسياً .
– تنظيم وقوف بعض الطلبة في صف واحد .
– تنظيم جلوس بعض الطلبة على عدد من المقاعد في صف .
– تكوين عدد من بضعة أرقام (مع عدم التكرار أو مع السماح بالتكرار) .

٢) توضيح للطلبة أنه يوجد طريقتان لحساب عدد التباديل وهي
$ل^{د}_{ر} = د(د-١)(د-٢) \ldots (د-ر+١)$ وتستخدم هذه الطريقة إذا كانت ر عدداً صغيراً معلوماً، أو $ل^{د}_{ر} = \frac{ل^{د}}{ل^{د-ر}}$ ، وتستخدم هذه الطريقة إذا كانت ر مجهولة أو عدداً كبيراً .

٣) توضيح الفرق بين (التباديل) (الاختيار مع الترتيب) ويمثل الاختيار المميز والتوافيق (الاختيار بدون ترتيب) ويمثل الاختيار غير المميز .

٤) توضيح انه إذا كانت ر عدداً صغيراً معلوماً فإننا نستخدم القانون $ق^{د}_{ر} = \frac{ل^{د}_{ر}}{ل_{ر}}$.

وإذاكانت ر مجهولة أو عدداً كبيراً نستخدم القانون $ق^{د}_{ر} = \frac{ل^{د}}{ل^{د-ر} \times ل_{ر}}$ عند ايجاد عدد التوافيق .

ونستخدم القانون $ق^{د}_{ر} = ق^{د}_{د-ر}$ في عملية التبسيط .

٥) توضيح الفرق بين التبديل الخطي والتبديل الدائري مع العلم أن التركيز في الموضوع يكون على التبديل الخطي .

http://e-learning-moe.edu.ye

٦) توضيح الفرق بين تبديل ن من الأشياء المختلفة، وتبديل ن من الأشياء من ضمنها عناصر متشابهة .

٧) استخدام مخطط الشجرة فقط لمزيد من التوضيح ، ولكن لايلزم الطلبة بضرورة استخدامه لأنه يحتاج وقتاً طويلاً .

٨) توظيف المبدأ الأساسي للعد عند تقديمك لمفهوم التباديل ثم توظيف التباديل في تقديم التوافيق .

٩) استخدام مواقف حياتية لا يكون فيها الترتيب مهماً عند عرض موضوع التوافيق، ومن أمثلة هذه المواقف :

– اختيار عدد من الكتب من أحد رفوف مكتبة .

– اختيار فريق لكرة القدم من بين طلبة الصف .

– اختيار بعض الطلبة لتمثيل المدرسة في مسابقات الجمهورية للثقافة .

١٠) التنبيه بضرورة اصطحاب الآله الحاسبة عند دراسة الموضوع وضرورة استخدامها لحساب لـ ن عندما تكون ن عدداً كبيراً توفيراً للوقت والجهد .

١١) توضيح إننا خلال دراستنا لهذا الموضوع بأكمله (مبدأ العد ، والتباديل والتوافيق) . نتعامل في الأساس مع ن ∈ صـ+ أيّ أن ن ∈ ط* .

١٢) يتوقع أن يرتكب الطلبة بعض الأخطاء التي قد شاع ملاحظاتها عند معالجة مواضيع هذه الوحدة ونؤكد على أن تعطى العلاقات التالية مع التركيز عليها حتى لايتم ربط خاطئ في الموضوع إذا كانت ا ، ن ∈ ط* ، ا > ٠ ؟

فإن ا × لـ ن ≠ لـ ا × ن .

فمثلاً :

٣ لـ ٤ = ٣ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢ .

بينما لـ ٣ × ٤ = لـ ١٢ = ٤٧٩٠٠١٦٠٠ .

أي أن : ٣ × لـ ٤ ≠ لـ ٣ × ٤ .

١٣) عند حل معادلة على الصورة :

لـ ٣ × ن = ٧٢٠ .

http://e-learning-moe.edu.ye

يوضح للطلبة أنه عند إيجاد قيمة د نضع العدد ٧٢٠ على صورة مضروب عدد صحيح موجب وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

أولاً : نضرب أعداداً صحيحة موجبة متتالية أصغرها واحد لنحصل على العدد ٧٢٠ . ونجد أن ١ X٢X٣X٤X٥X٦ = ٧٢٠ .

أي أن : ٧٢٠ = لـ٦ .

لـ٣ د = لـ٦ ⟸ ٣ د = ٦

∴ د = ٢ .

ثانياً : نقسم العدد ٧٢٠ على العدد واحد ثم نقسم الناتج على العدد ٢ ، ثم نقسم الناتج على العدد ٣ . ونستمر بهذه العملية حتى يصبح ناتج القسمة ٦ ستكون

٧٢٠ = ١X٢X٣X٤X٥X٦ = ٦ ! .

∴ ٣ د = ٦ ⟸ د = ٢ .

٧٢٠	١
٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦
١	

١٥) نبه الطلبه لمايأتي :

أ) لـ٣+٢ ≠ لـ٣ + لـ٢ .

ب) لـ٥ - لـ٣ ≠ لـ٢ .

جـ) لـ٣ د ≠ ٣ لـد .

د) لـ٦ / لـ٣ ≠ لـ٢

هـ) لـ٢ X لـ٣ ≠ لـ٦ .

http://e-learning-moe.edu.ye

١ - ١ مبدأ العد

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١- يعرّف المبدأ الأساسي للعدّ .

٢- يعمم مبدأ العدّ .

٣- يستخدم مبدأ العدّ في حل بعض المسائل الحياتية .

٤- يعرف مضروب عدد صحيح موجب ، ويحسبه .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مبدأ العدّ .

الحصة الثانية : مضروب عدد صحيح موجب / أمثلة متنوعة .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم :

يقوّم المعلم الطلبة من خلال المناقشات، ومن خلال حل بعض التدريبات والواجب المنزلي . وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

تضم قائمة الطعام بأحد المطاعم أربعة أنواع مختلفة من الخضار وخمسة أطباق من الفواكه . بكم طريقة يمكن لأحد رواد المطعم أن يطلب طبق خضرة وطبق من الفاكهة ؟

الإجابة : الطرق الممكنة لاختيار خضره = ٤ ، وعدد الطرق الممكنة لاختيار طبق فاكهة = ٥ طرق .

∴ عدد طرق اختيار طبق من الخضار وطبق من الفاكهة = ٤ × ٥ = ٢٠ طريقة.

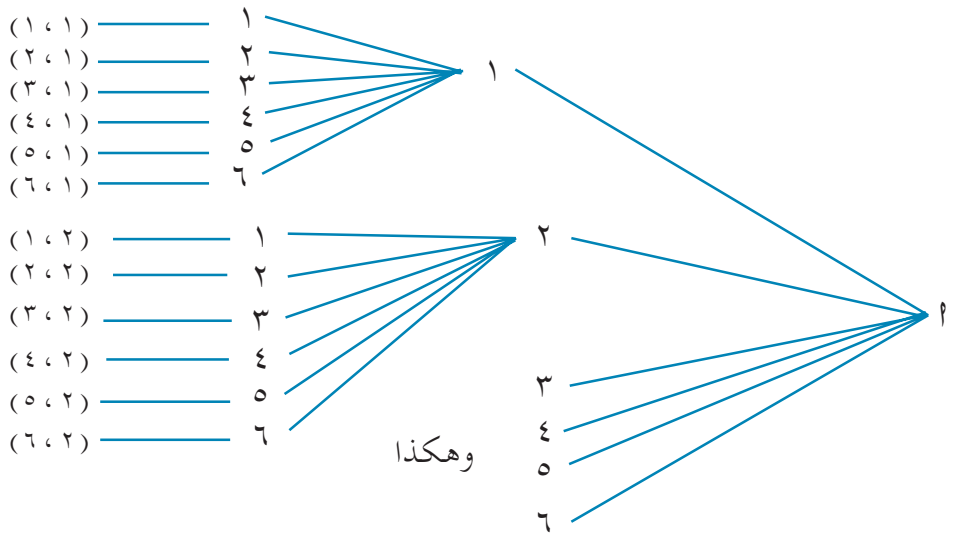
إرشادات وحلول تمارين ومسائل (١ - ١) :

[١] عدد الطرق = ٢ × ٢ = ٤ طرق .

[٢] عدد الطرق = ٦ × ٦ = ٣٦ طريقة .(حجر النرد له ستة أوجه) .

http://e-learning-moe.edu.ye

(حجر النرد له ستة أوجه) .



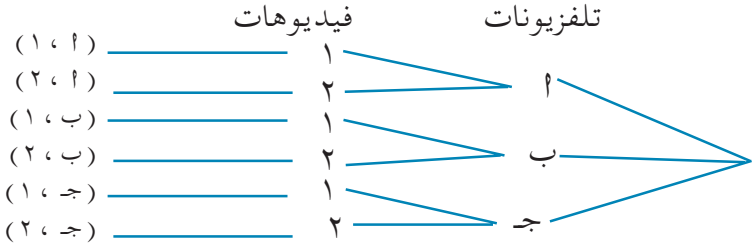
من المخطط الشجرى نجد أن عدد الطرق = ٣٦ طريقة .

[٣] مع التكرار تكون عدد الطرق = ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧ طريقة .

بدون تكرار تكون عدد الطرق لـ ٣ = ٣ × ٢×١ = ٦ طرق .

[٤] عدد الطرق = ٥×٤×٣ = ٦٠ طريقة .

[٥] عدد الطرق = ٣×٢ = ٦ طرق .



من المخطط الشجرى نجدأن عدد الطرق = ٦ طرق .

[٦] عدد الطرق = لـ ١٠ = ١٠ × ٩× ... × ٢×١ طريقة .

[٧] عدد الطرق = ١٠×٩×٨×٧×٦ .

[٨] أ) عدد الطرق = ٣×٣ = ٩ طرق .

ب) عدد الطرق = ٣×٤ = ١٢ طريقة (الصفر في المنزلة الأخيرة ليس له قيمة) .

http://e-learning-moe.edu.ye

[٩] عدد الطرق = ٤ × ٥ × ٤ = ٨٠ طريقة .

[١٠] عدد الطرق = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٢ = ٢ × ١٠ ^{٤} طريقة .

[١١] عدد الطرق = ١٠ × ٨ = ٨٠ طريقة .

[١٢] عدد الطرق = ٥ × ٣ = ١٥ طريقة .

[١٣] عدد الطرق = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ .

[١٤] أ) $\frac{ل_{ن}}{ل_{٨}}$ = $\frac{٤٠١٢٠}{ل_{٨}}$.

$\frac{ل_{ن}}{ل_{٨}}$ = $\frac{٤٠١٢٠}{ل_{٨}}$.

$\frac{ل_{ن}}{ل_{٨}}$ = $\frac{ل_{٨}}{ل_{٨}}$ ⟸ ن = ٨ .

ب) ٥ $\frac{ل_{ن}}{ل_{٨}}$ = ٣٦٠٠ بقسمة الطرفين على ٥ .

$\frac{ل_{ن}}{ل_{٨}}$ = ٧٢٠ .

$\frac{ل_{ن}}{ل_{٦}}$ = ٧٢٠ .

$\frac{ل_{ن}}{ل_{٦}}$ = $\frac{ل_{٦}}{ل_{٦}}$ ⟸ ن = ٦ .

جـ) ٣٠ $\frac{ل_{س}}{ل_{س+٢}}$ = $\frac{ل_{س}}{ل_{س+٢}}$.

٣٠ $\frac{ل_{س}}{ل_{س}}$ = (س + ٢) (س + ١) $\frac{ل_{س}}{ل_{س}}$.

٣٠ = س^{٢} + ٣س + ٢ .

س^{٢} + ٣س − ٢٨ = .

(س + ٧) (س − ٤) = .

اما س = − ٧ وهذا مرفوض .

∴ س = ٤ .

http://e-learning-moe.edu.ye

١ - ٢ التبـاديـــل

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف :

١- يعرّف تباديل د من العناصر .

٢- يوجد تباديل د من العناصر .

٣- يعرّف تباديل د من العناصر مأخوذة ر في كل مرة (ر ≤ د) .

٤- يوجد تباديل د من العناصر مأخوذة ر في كل مرة (ر ≤ د) .

تنفيذ البند : يتم تنفيذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : تباديل د من العناصر مأخوذة كلها .

الحصة الثانية : مضروب العدد .

الحصة الثالثة : حل أمثلة وتمارين .

الحصة الرابعة : تباديل د من العناصر مأخوذة ر في كل مرة .

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم : يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة ومتابعة أداء الطلبة لحل التدريبات والواجب المنزلي . ويعطي التمرين الآتي نهاية الحصة الخامسة كخطوة تقويم :

أ) أحسب : $\frac{\text{لـ}٤}{\text{لـ}٢ \text{ لـ}} =$

ب) أوجد قيمة د إذا كان : $\frac{\text{لـ}\ \text{د}}{\text{لـ}\ ٣} = ٧٢٠$.

جـ) املأ الفراغ : $\frac{\text{لـ}٦}{\square \text{ لـ}} = \square$ ل ، $\frac{\text{لـ}\square}{\text{لـ}٤} =$ ل$_{٥}^{٩}$

إرشادات وحلول تمارين ومسائل (١ - ٢) .

[١] ٤٢ ، ١ ، $\frac{١}{١١٢}$ ، ٣٥٢٨٠ ، ١X٢X ٣ X ٤ X ٥ X ٦ X ٧ X ٨ X ٩

[٢] أ) أولاً : نرتب الأرقام = ٣X٤X٥X٦X٧ = ل$_{٥}^{٧}$.

ب) ١٢٠ = ١X٢X٣X٤X٥ = ل$_{٥}^{٥}$.

جـ) ٢١٠ = ٥X٦X٧ = ل$_{٣}^{٧}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

د) $د(د-١)(د-٢) = {}^{د}ل_{٣}$.

هـ) $(د-٢)(د-٣)(د-٤)(د-٥) = {}^{د-٢}ل_{٤}$.

[٣] أ) ${}^{د}ل_{د} = ٧٢٠$.

${}^{د}ل_{د} = \frac{لـ د}{لـ ٦}$ ، $٧٢٠ = \frac{لـ د}{لـ ٦}$.

$\therefore د = ٦$.

ب) $\frac{لـ د}{لـ(د-٤)} = \frac{٣\,لـ د}{لـ د - ٣} \Leftarrow \frac{١}{لـ د - ٤} = \frac{٣}{(د-٣)\,لـ د - ٤}$

$د - ٣ = ٣ \Leftarrow د = ٦$.

جـ) $١٤(د-٤)(د-٣)(د-٢)(د-١) = د(د-١)(د-٢)(د-٣)$

$١٤(د-٤) = د(د-١)$.

$١٤د - ٥٦ = د^{٢} - د \Leftarrow د^{٢} - ١٥د + ٥٦ = ٠$

$(د-٨)(د-٧) = ٠$

أما $د = ٨$.

او $د = ٧$.

د) $\frac{لـ(٢د+١)}{لـ(٢د+١-د+١)} \times \frac{لـ(٢د-١-د)}{لـ(٢د-١)} = \frac{٣}{٥}$.

$\frac{لـ(٢د+١)}{لـ(د+٢)} \times \frac{لـ(د-١)}{لـ(٢د-١)} = \frac{٣}{٥}$.

$\frac{(٢د+١)(٢د)\,لـ(٢د-١)}{(د+٢)(د+١)\,د\,لـ(د-١)} \times \frac{لـ(د-١)}{لـ(٢د-١)} = \frac{٣}{٥}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\frac{٤ د + ٢}{د^{٢} + ٣ د + ٢} = \frac{٣}{٥}$$

$٢٠ د + ١٠ = ٣ د^{٢} + ٩ د + ٦$.

$٣ د^{٢} - ١١ د - ٤ = ٠$

$(٣ د + ١)(د - ٤) = ٠$ اما $د = \frac{-١}{٣}$ وهذا مرفوض .

أو $د = ٤$ ∴ $\boxed{د = ٤}$.

[٤] أ) $$\frac{\text{ل}_{د+٣}}{\text{ل}_{د}} = \frac{\text{ل}_{د+٢}(د+٣)}{\text{ل}_{د+٢-٢}}$$

$$\frac{\text{ل}_{د+٢}(د+٣)}{\text{ل}_{د}} = \frac{\text{ل}_{د+٢}(د+٣)}{\text{ل}_{د}}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر .

حل آخر : الطرف الأيمن= $\frac{\text{ل}_{د+٣}}{\text{ل}_{د}} = \frac{\text{ل}_{د+٢}(د+٣)}{\text{ل}_{د}}$ = الطرف الأيسر.

ب) الطرف الأيمن =

$$\frac{\text{ل}_{د+١}}{\text{ل}_{د+٨-ر-٧}} = \frac{\text{ل}_{د+١}}{\text{ل}_{د-ر}} = \frac{\text{ل}_{د+١}(د+١)}{\text{ل}_{د-ر}}$$

$= (د + ١)$ ل$^{د}_{ر}$ = الطرف الأيسر .

جـ) الطرف الأيمن =

$$\frac{\text{ل}_{د}}{\text{ل}_{د-ر}} \times \frac{\text{ل}_{د-ر}}{\text{ل}_{د-١}} = \frac{\text{ل}_{د+١-ر-١}}{\text{ل}_{د-١}}$$

http://e-learning-moe.edu.ye

$$= \frac{د \; ل د - ١}{ل د - ر} \times \frac{ل د - ر}{ل د - ١} = د = \text{الطرف الأيسر} .$$

د) الطرف الأيمن $= \frac{ل د - ١}{ل د - ١ - ر} + \frac{ر \; ل د - ١}{ل د - ر + ١ - ١}$

$$= \frac{ل د - ١}{ل د - ر - ١} + \frac{ر \; ل د - ١}{ل د - ر}$$

$$= \frac{ل د - ١}{ل د - ر - ١} + \frac{ر \; ل د - ١}{(د - ر) \; ل د - ر - ١}$$

$$= \frac{(د - ر) \; ل د - ١ + ر \; ل د - ١}{(د - ر) \; ل د - ر - ١}$$

$$= \frac{(د - ر + ر) \; ل د - ١}{ل د - ر}$$

$$= \frac{د \; ل د - ١}{ل د - ر} = \frac{د \; ل د}{ل د - ر} = \text{الطرف الأيسر}$$

[٥] ∵ $ل د = ٢٤ \Leftarrow د = ٤$.

$$ل_{٥}^{١٢} = ل_{٥}^{٤ \times ٣} = \frac{ل ١٢}{ل ٧}$$

[٦] $ل_{ر}^{٩} = ٦٠٤٨٠$.

$$\frac{ل ٩}{ل ٩ - ر} = \frac{ل ٩}{ل ٣} \Leftarrow ٩ - ر = ٣ .$$

∴ $ر = ٦$ ∴ $ل = ٧٢٠$.

[٧] عدد الطرق $= ل_{٣}^{٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$ طريقة .

[٨] عدد الطرق $= ل_{٤}^{٤} = ل = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$ طريقة .

[٩] عدد الطرق $= ل_{٢}^{٤} = ٤ \times ٣ = ١٢$ طريقة .

http://e-learning-moe.edu.ye

[١٠] أ) $\frac{\text{س ل}٥}{\text{ل}٢} = \frac{\text{ل}٧}{\text{ل}٢}$

س ل٥ = ٧×٦ ل٥ ⟸ س = ٤٢ .

ب) $\frac{\text{ل س} + ٢}{\text{ل س} - ١} = ٤٢$ س .

$\frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ١)(\text{س})\ \text{ل س}}{\text{ل س}} = ٤٢$ س .

س^{٢} + ٣ س + ٢ − ٤٢ = ٠

س^{٢} + ٣ س − ٤٠ = ٠

(س + ٨) (س − ٥) = ٠ ، إمّا س = − ٨ وهذا مرفوض .

∴ س = ٥ .

جـ) $\frac{\text{ل س} \quad \text{ل س}}{\text{ل س} \quad \text{ل س} - ٢} = ٢٠$.

(س) (س − ١) ل س − ٢ = ٢٠ ل س − ٢ .

س^{٢} − س − ٢٠ = ٠

(س − ٥) (س + ٤) = ٠ ، ∴ س = ٥ .

د) ٣٠ $\frac{\text{ل س} + ٣}{\text{ل س}} = \frac{\text{ل س} + ٥}{\text{ل س}}$ ⟸ ٣٠ ل س = (س+ ٥) (س + ٤) ل س .

٣٠ = س^{٢} + ٩س + ٢٠ ⟸ س^{٢} + ٩س − ١٠ = ٠ ⟸ س = ١ .

[١١] عدد الطرق التي يتم فيها ترتيب الستة الكتب = ل٦ .

عدد طرق ترتيب الكتب بحيث يظل كتابان معاً = ل٥ .

[١٢] أ) عدد الطرق = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ .

ب) عدد الطرق = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ .

[١٣] عدد الطرق = ل$^{\circ}$٣ = ٣×٤×٥ = ٦٠ طريقة .

http://e-learning-moe.edu.ye

١ – ٣ التوافيق

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف :

١– يعرّف توافيق د من العناصر .

٢– يكتب قانون التوافيق ويستخدمه في حساب توافيق د من العناصر مأخوذة ر في كل مرة (ر ، د ∈ ط*) .

٣– يحل مسائل تطبيقية .

تنفيذ البند : يتم تنفيذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : توافيق د من العناصر مأخوذة ر في كل مرة .

الحصة الثانية : استنتاج قانون عدد التوافيق .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

الحصة الرابعة : حالات خاصة .

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم : يتم التقويم البنائي من خلال المناقشات ومتابعة أداء الطلبة لحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي . يُعطى التمرين الآتي كخطوة تقويم في نهاية الحصة الخامسة :

أ) أوجد قيمة $و_{١}^{١٠}$ ، $و_{١٤}^{١٤}$ ، $و_{٢}^{٥}$.

ب) ضع علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ .

١) $لـ٥ - لـ٣ = لـ٢$ ( ) .

٢) $\frac{لـ٦}{لـ٣} = لـ٢$ ( ) .

٣) $لـ(٥ - ٣) \times ٣ = لـ٣$ ( ) .

إرشادات وحلول تمارين ومسائل (١ – ٣) .

[١] ٢ ، ٧٠ ، صفر ، ٥٥ ، ٢٣ ، ٤٩٥٠ .

[٢] أ) أما ر = ٦ أو ر = ٩ .

http://e-learning-moe.edu.ye

ب) أما ٢ ر = ر + ٢ ⟸ ر = ٢ .

أو ٢ ر + ر + ٢ = ٢٠ .

٣ ر = ١٨ .

ر = ٦ .

جـ) أما ر + ٤ = ر − ٢ وهذا مرفوض .

أو ر + ٤ + ر − ٢ = ٢٨ .

٢ ر = ٢٦ .

ر = $\frac{٢٦}{٢}$ = ١٣ .

د) $\frac{\text{ل ن}}{\text{ل ن} - \text{ر}}$ = $\frac{\text{ل ن}}{\text{ل ن} - \text{ر} + \text{ن} - \text{ر}}$ ⟸ ل ر = ١٢٠ .

∴ ل ر = ل ٥ ⟸ ر = ٥

[٣] أ) $\frac{\text{ل ن}}{\text{ل ٢ ل ن} - ٢}$ = ٤٣٥ ⟸ $\frac{\text{ن} (\text{ن} - ١) \text{ل ن} - ٢}{\text{ل ن} - ٢}$ = ٨٧٠ .

ن^{٢} − ن − ٨٧٠ = ٠ ⟸ (ن − ٣٠) (ن + ٢٩) = ٠ ⟸ ن = ٣٠ .

ب) $\frac{\text{ل ن}}{\text{ل ٦ ل ن} - ٦}$ = $\frac{\text{ل ن} ١٢}{\text{ل ٤ ل ن} - ٤}$ ⟸ ن^{٢} − ٩ ن − ٥٢ = ٠

⟸ ن = ١٣ .

جـ) بالأسلوب السابق نفسه نحصل على أن ن = ٨ .

[٤] (أ) عدد الطرق = ($\binom{١٢}{٥ ، ٥ ، ٢}$) = $\text{ق}_{٢ ، ٥ ، ٥}^{١٢}$ = $\frac{\text{ل ١٢}}{\text{ل ٢ ل ٥ ل ٥}}$ = ١٦٦٣٢ طريقة .

(ب) عدد الطرق = $\binom{٤}{٢ ، ١ ، ١}$ = $\frac{\text{ل ٤}}{\text{ل ٢ ل ١ ل ١}}$

(جـ) عدد الطرق = $\binom{٤}{٢ ، ٢}$ = $\frac{\text{ل ٤}}{\text{ل ٢ ل ٢}}$

http://e-learning-moe.edu.ye

[٥] عدد الطرق = $ن ق_{٥}^{٨} = \frac{ل_{٨}}{ل_{٥} \; ل_{٣}}$

[٦] عدد الطرق = $ن ق_{٥}^{١٠} = \frac{ل_{١٠}}{ل_{٥} \; ل_{٥}}$.

[٧] عدد الطرق = $ن ق_{٥}^{١٠} = \frac{ل_{١٠}}{ل_{٥} \; ل_{٥}}$.

[٨] عدد الطرق = $ن ق_{٤}^{٨} + ن ق_{٥}^{٨} + ن ق_{٦}^{٨} + ن ق_{٧}^{٨} + ن ق_{٨}^{٨}$.

[٩] عدد الطرق = $ن ق_{٤}^{٨} + ن ق_{٣}^{٨} + ن ق_{٢}^{٨} + ن ق_{١}^{٨} + ن ق_{٠}^{٨}$.

[١٠] عدد الطرق = $ن ق_{٣}^{١١} = ن ق_{٣}^{٨} \cdot$ (٣٠٨٠) = طريقة .

[١١] أ) عدد الطرق = $ن ق_{٧}^{١٥}$.

ب) عدد الطرق = $ل_{١}^{١٠} \cdot ن ق_{٣}^{٩} \cdot ن ق_{٣}^{٥} \cdot$.

جـ) عدد الطرق = $ن ق_{٣}^{١٠} \cdot ن ق_{٤}^{٥} + ن ق_{٤}^{١٠} \cdot ن ق_{٣}^{٥} + ن ق_{٥}^{١٠} \cdot ن ق_{٢}^{٥} +$
$ن ق_{٦}^{١٠} \cdot ن ق_{١}^{٥} + ن ق_{٧}^{١٠} \cdot ن ق_{٠}^{٥}$.

[١٢] عدد الطرق = $ن ق_{٥}^{١٠} \cdot ن ق_{٤}^{٦}$

[١٣] $ن ق_{٩}^{٢٤} \cdot ن ق_{٨}^{١٥} \cdot ن ق_{٧}^{٧} \cdot$

حل آخر :

عدد الطرق = $\binom{٢٤}{٩ ، ٨ ، ٧}$.

[١٤] عدد الطرق = $ن ق_{٣}^{١٨} \cdot ن ق_{٤}^{١٥} \cdot ن ق_{٥}^{١١}$.

[١٥] أ) الطرف الأيمن = $\frac{ل ج}{ل_{ر+١} \; ل_{ج-ر-١}} + \frac{٢ \; ل ج}{ل ر \; ل_{ج-ر}} + \frac{ل ج}{ل_{ر-١} \; ل_{ج+١-ر}}$

على المدرس فك الأقواس وإكمال الحل .

http://e-learning-moe.edu.ye

١ – ٤ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة :

الهدف : يقيس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ البند : ينفذ هذا البند في حصة واحدة .

يُعطى الاختبار الذي في دليل المعلم أوما شابه ذلك بحيث يغطي أهداف الوحدة حسب الجدول الآتي :

رقم السؤال	رقم الهدف
[١] أ)	١ ، ٢
ب)	٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨
[٢] أ ، ب	٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨
[٣]	٧ ، ٨
[٤]	٦ ، ٨ ، ٩

الاختبـــار

[١] أ) يتكون مجلس إدارة إحدى المدارس من ستة أعضاء ، فبكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين سر ؟

ب) أوجد مايأتي :

١) $\frac{\text{لـ}٦}{\text{لـ}٣ \times \text{لـ}٣}$. ٢) $\frac{\text{ل}_{٨}}{\text{ل}_{٤} \times \text{ل}_{٣}}$. ٣) $\text{و}_{٩٨}^{١٠٠}$.

[٢] أ) بسط مايأتي :

١) $\frac{\text{و}_{٣}^{٨}}{\text{و}_{٢}^{٨}}$ ٢) $\frac{١}{\text{لـ د}} + \frac{١}{\text{لـ د}+١} + \frac{١}{\text{لـ د}+٢}$.

ب) أوجد قيمة ك إذا كان :

$\text{و}_{٤}^{\text{ك}} = ٣ \times \text{ل}_{٣}^{\text{ك}}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

[٣] بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من أربعة مدراء على الأقل من بين سبعة مدراء ؟

[٤] تتألف جماعة التوعية الإسلامية في مدرسة ثانوية من ١٠ طلاب و ٣ مدرسين، بكم طريقة يمكن اختيار هيئة إدارية لجماعه تتألف من ٥ أشخاص في كلٍ من الحالتين الآتيتين :

أ) أن تضم الهيئة فقط مدرساً واحداً .

ب) أن تضم الهيئة مدرساً على الأقل .

المصطلحات

مبدأ العد	Counting Principle
المبدأ الأساسي للعد	Fundamental Counting of Principle
اختيار	Choice
طريقة	Way
التكرار مسموح	With Repetition
التكرار غير مسموح	Without Repetition
التباديل	Permutations
المضروب	Factorial
التوافيق	Combinations

http://e-learning-moe.edu.ye

المراجع

أ) المراجع بالعربية :

١ – إسهام علماء المسلمين في الرياضيات، علي عبد الله الدفاع ، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم ، دار الشروق ، بيروت والقاهرة الطبعة الأولى ١٩٨١م .

٢ – الرياضيات في الحضارة الإسلامية ، موريس شربل ، جروس برس ، لبنان ١٩٨٨م .

٣ – موسوعة علماء الرياضيات ، عدنان دعنا ، دار أسامة للنشر والتوزيع ، الأردن الطبعة الأولى ٢٠٠١م .

٤ – تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب ، رشدي راشد ، مركز دراسات الوحدة العربية ، بيروت الطبعة الأولى ، ١٩٨٩م .

٥ – الرياضيات للصف الثاني ثانوي علمي الجزء الثاني ، مكتب التربية العربي لدول الخليج ، دولة الامارات العربية المتحدة ، الطبعة الثالثة ٢٠٠٠ – ٢٠٠١م .

٦ – الرياضيات للصف الثاني ثانوي علمي ، وزارة المعارف ، المملكة العربية السعودية، ١٩٩٩م .

٧ – أسس الرياضيات ، عدنان جميل الحشون ، دار الفرقان للنشر والتوزيع ، عمان – الأردن ، الطبعة الأولى ١٩٨٤م .

ب – المراجع الإنجليزية :

1 - Fundamental of Algebra and Trigonometry, E. Swokowski and J. Lde, Pws - Kemt Publishing Company. Booton. V. S.A. 1992.

2 - College Algebra and Trigonometry .

- B. Kolman , M.levitan , A. Shapiro , Harcourt Brace Prace Pub., U. S. A.1993

- J. Kaufmann, Pws-Kemt Pub. U. S. A. 1987.

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الثانية الإحصـــــاء

جدول توزيع الحصص

البند	الموضوع	عدد الحصص
٢ – ١	مراجعة	٤
٢ – ٢	الارتباط وأشكال الانتشار	٨
٢ – ٣	الانحدار	٥
٢ – ٤	اختبار الوحدة	١
المجمـــوع		١٨

أهداف الوحدة :

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرّف بعض مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ويحسبها .

٢ – يعرّف مفهوم الارتباط والانتشار .

٣ – يرسم شكل الانتشار ويفسر نوع الارتباط ودرجة قوته .

٤ – يحسب معاملي ارتباط بيرسون وسبيرمان بين متغيرين .

٥ – يعرّف مفهومي الانحدار والانحدار الخطي .

٦ – يحسب معاملي انحدار ص على س ، س على ص .

٧ – يكتب معادلة انحدار ص على س ، س على ص ويستخدمها للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر .

٨ – يحسب معامل الارتباط في حالة انحدار س على ص أو في حالة انحدار ص على س .

٩ – يحل مسائل حياتية تطبيقية .

http://e-learning-moe.edu.ye

المقدمـــــة

تأتي هذه الوحدة تكملة لما تم دراسته في الصفوف السابقة، فقد بدأت هذه الوحدة بمراجعة لمقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت لما لها من أهمية في دراسة هذه الوحدة .

تشمل هذه الوحدة أشكال الانتشار ومعامل الارتباط وقد اقتصرت على الارتباط الخطي وحساب معامل ارتباط بيرسون ومعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وكذلك التعرف على الانحدار وعلى معادلة الانحدار الخطي والتنبؤ من خلالهما بقيمة المتغير التابع بدلالة المتغير المستقل ، كما انتهت الوحدة باختبار يقيس أهداف الوحدة .

ونأمل أن تكون هذه الوحدة قد قدمت مادة تتناسب مع مستوى طلبة القسم الأدبي، وبشكل مبسط .

لمحة تاريخية :

منذ نشأة الإنسان على الأرض ، والإحصاء ضرورة هامة في حياته . وقد استخدمت الطرق الإحصائية قديماً لتلخيص البيانات ووصفها فقط ، واليوم يعتبر علم الإحصاء عنصراً أساسياً لبناء وتطوير المجتمع في جميع النواحي المختلفة الاقتصادية والاجتماعية والتربوية والعلمية وغيرها .

وعلم الإحصاء على أية حال هو فرع من فروع الرياضيات، ويعد قدماء المصريين من أول الشعوب التي بدأت تستخدم الإحصاء كوسيلة لتنظيم أعمالهم، وذلك عند بدء بناء الأهرام .

وفي العصور الوسطى نجد أن بعض الملوك ورؤساء القبائل – ومن بينهم الخليفة المأمون – كانوا يقومون بين الحين والآخر بعمل تعداد للسكان ليتعرفوا على مالديهم من الرجال وقدرتهم على الدفاع عن أوطانهم .

وقد تطـور عـلم الإحصـاء نتيجة لأهميته في العلـوم الاجتماعية، إذ وضع كتيبليه (١٧٩٦ – ١٨٧٤) عالم الفلك البلجيكي إمكانية استخدام علم الإحصاء في وصف وتفسير الظواهر الاجتماعية والاقتصادية ، وقدَّم مساهمات هامـة فـي الطـرق

http://e-learning-moe.edu.ye

الإحصائية وفي تنظيم وإدارة الإحصاءات الرسمية، وقدم كذلك طريقة عامة للقياس في الانتربولوجيا . كما قدم عالم النفس الإنجليزي فرنسيس جالتون (١٨٢٢ – ١٩١١) تطبيق الطرق الإحصائية في علم النفس ووضع أساس علم القياس النفسي . وبدأ في دراسة موضوع الارتباط والانحدار الذي اهتم به وطوره بعد ذلك عالم الإحصاء الإنجليزي كارل بيرسون (١٨٥٧– ١٩٣٦) بالإضافة إلى مساهمات آخرى هامة ، كما قدم سيبرمان (١٨٦٣ – ١٩٤٥) مساهمات فعَّالة في دراسة الارتباط، ويعد من الرواد في دراسة وتطوير التحليل العاملي .

وقدَّم عالم الإحصاء جوست (١٨٧٦ – ١٩٣٧) مساهماته القيمة في مجال التحليل الإحصائي وتفسير البيانات المتعلقه بالعينات .

أما مفهوم الانحدار فقد جاء من العالم فرنسيس جالتون الذي أطلق عليه هذا الاسم نتيجة لدراسته علاقة أطوال الأبناء بأطوال آبائهم .

وخلاصة القول إن علم الإحصاء هو علم قديم وقد اشترك في دراسته الكثير من الرياضيين والعلماء إلا أنه لم توضع له مسلمات إلاَّ بعد عام ١٩٢٠م تقريباً؛ وأصبح اليوم لعلم الإحصاء أهمية خاصة في كل مرافق الدول والمؤسسات والشركات العامة والخاصة حتى على مستوى الأفراد العاديين لما لهذا العلم من فؤائد كبيرة في التقدم والتنمية .

خلفية علمية :

تعلم من السنوات السابقة أن مقاييس النزعة المركزية تعطينا فكرة عن القيمة التي تتجمع حولها بقية القيم الأخرى في مجموعة من المشاهدات المأخوذة على ظاهرة ما .

وتعرفت أن الوسط الحسابي يتاثر بالقيم المتطرفة والشاذة وكذلك لايصلح لتمثيل البيانات الإحصائية المبوبة والتي تحتوي على فئات مفتوحة، لأن مراكز هذه الفئات يصعب تحديدها بالضبط .

لذلك فان مقاييس النزعة المركزية تعجز عن إعطاء وصف كامل وصورة تامه لتلك المشاهدات .

جاءت مقاييس التشتت مكملة لمقاييس النزعة المركزية لأن مقاييس التشتت تصف مدى تباعد قيم المجموعة عن بعضها البعض، فاذا كان التباعد بين القيم صغيراً، أخذ

http://e-learning-moe.edu.ye

ذلك دليلاً على تجانس هذه القيم، والعكس إذا كان التباعد بين قيم المجموعة كبيراً فإنه يمكن القول بأن هذه القيم غير متجانسه .

وتستعمل هذه المقاييس في معالجة البيانات المتعلقة بمتغير واحد، لكن هناك دراسات تحتوي على متغيرين أو أكثر ، ومن هذه الدراسات تلك التي تهتم بمعالجة العلاقة لمجموعتين من البيانات مثل دراسة العلاقة بين أوزان أفراد وأطوالهم ، أو العلاقة بين الذكاء لعدد من الطلبة وقدرتهم على التحصيل الأكاديمي ، أو العلاقة بين صادرات إحدى الدول وإيراداتها في عدد من السنوات ... إلخ .

ويمكن معالجة مثل هذه العلاقات من خلال الارتباط والانحدار وهما الموضوعان اللذان تعرضها في هذه الوحدة .

الارتباط :

الارتباط بين ظاهرتين معناه وجود علاقة بينهما بحيث إذا تغير أحدهما في اتجاه معين ، مال الآخر إلى التغير في الاتجاه نفسه، أو في الاتجاه المعاكس . ويسمى الارتباط في الحالة الأولى طردياً موجباً كما في العلاقة بين طول الأبناء وطول آبائهم، بينما يسمى الارتباط في الحالة الثانية عكسياً أو سالباً ، كما في العلاقة بين قدرة الفرد على التعليم والتعب الفيزلوجي .

وبناء على تعريفنا للارتباط بهذا الشكل فإن انعدام الارتباط بين متغيرين معناه أن اتجاه المتغير في قيم الظاهرة الأولى لايصاحبه تغير في الظاهرة الثانية ، أو لايدل بأي حال من الأحوال على اتجاه التغير في قيم الظاهرة الثانية؛ أي أنه إذا مالت قيم الظاهرة الأولى إلى الزيادة مثلاً فإن قيم الظاهرة الثانية قد تميل إلى الزيادة أو إلى النقصان أو تبقى كما هي دون تغير .

أنواع الارتباط :

ينقسم الارتباط من حيث عدد الظواهر الداخلة فيه والتي تتعلق بظواهر يمكن قياسها أو التعبير عنها بصورة رقمية إلى ثلاثة أقسام وذلك بالنسبة لعدد المتغيرات الداخلة فيه، وهذه الأقسام هي :

http://e-learning-moe.edu.ye

١) **الارتباط البسيط** (Simple correlation) وهو الذي يبحث العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين فقط .

٢) **الارتباط المتعدد** (Multiple Correlation) وهو الذي يبحث العلاقة بين متغيرين معينين ومتغيرين آخرين أو أكثر مأخوذين معاً .

٣) **الارتباط الجزئي** (Partial Correlation) وهو الذي يبحث في العلاقة بين متغيرين فقط من بين عدة متغيرات على فرض أن تأثير بقية المتغيرات الأخرى تبقى ثابتة .

الانحدار :

نحتاج في كثير من المسائل الإحصائية التي تتعلق بمتغيرين تربط بينهما علاقة معينة إلى تقدير قيم أحدهما من خلال معرفتنا بقيم الآخر ؛ فمثلاً قد يحتاج معلم الصف في أول العام الدراسي إلى التنبؤ بمستوى الطلبة نهاية العام في موضوع معين اعتماداً على نتائجهم في اختبار يعطيه لهم في بداية العام للموضوع نفسه ، أو يحتاج المخطط التربوي إلى التنبؤ بما يمكن أن تكون عليه أعداد الطلبة في المدارس التابعة لوزارة التربية والتعليم في سنوات قادمة تأسيساً على ما سبق، وهكذا .

ومن الطبيعي أن تعتمد هذه التقديرات في دقتها على مدى العلاقة التي تربط بين المتغيرين ، فكما كانت هذه العلاقة عالية ، كانت دقة التقديرات عاليه تبعاً لذلك .

ولحساب التقديرات المطلوبة في مثل هذه الحالات نستعمل معادلة الانحدار وتوظيف المعلومات أو البيانات المتجمعة عن الظاهرتين مدار الدراسة؛ وهذا يعني أنه كي نستطيع التنبؤ بما يمكن أن تكون عليه حال ظاهرة ما في المستقبل فلابدلنا من الاحاطة بما كانت عليه حالها في الماضي أو في الحاضر .

ويعترض كثير من الناس على تسمية الموضوع الحالي بالانحدار لأن مثل هذا الاسم لايتضح منه معنى التنبؤ أو التقدير كما هو مقصود بذلك ، ولكن اعتراضهم هذا سرعان مايتلاشى عندما يعلمون بحقيقة الأمر الذي حدا بالعالم فرانسيس جالتون (Francis Galton) إلى خلع هذا الاسم عليه ، فعندما كان يقارن بين أطوال الآباء وأبنائهم ، وجد كما يتوقع هو أن أبناء الآباء الذين يتميزون بطول القامة كان في الغالب

http://e-learning-moe.edu.ye

أبنائهم يتميزون بطول القامة عن أبناء الآباء الذين يتميزون بقصرها؛ ولكنه وجد في الوقت نفسه، أن أطوال بعض أبناء الأشخاص الذين يتميزون بأطوال متطرفة (طويلة جداً أو قصيرة جداً) لا تشبه أطوال آبائهم ، بل أنها بدلاً من ذلك تميل أو تنحدر نحو الوسط . ولما كانت المعادلة التي نستخدمها أساساً لعملية التنبؤ أو التقدير لاتمثل القيم الأصلية ، كل على انفراد ، بل الاتجاه العام لها جميعاً ، ذلك على فرض أن القيم المتطرفة أو الشاذة عن الاتجاه العام تميل مع التكرار إلى الاقتراب منه والانحدار إليه ولذلك أطلق عليه اسم معادلة الانحدار .

إرشادات طرائقية عامة :

إن لطريقة التدريس أثراً كبيراً في تحقيق أهداف الدرس، وينبغى أن نتذكر دائماً أنه لايكفي أن يكون المعلم متمكناً في مادته العلميةُ وإنما يجب أن يكون فناناً بارعاً ومبدعاً في طريقة أدائه وشرحه وتبسيط المعارف إضافة إلى اتصاله وتفاهمه وعلاقته الحسنة مع الطلبة ، ويحدد الطريقة تبعاً لطبيعة موضوع الدرس وأهدافه المرجوة . وتختلف طريقة التدريس من مادة إلى أخرى ومن موضوع إلى آخر ، وربما يستخدم المعلم في الدرس الواحد أكثر من طريقة . وعلى المعلم الانتباه دائماً إلى أن عامل الإثارة والتشويق يجب أن يستمر طوال مراحل الدرس ، وأن يراعي الفروق الفردية بين الطلبة واستخدام الأساليب التي تنشط التفكير والإبداع والاعتماد على النفس ، وتحقق أكبر قدر ممكن من مشاركة الطلبة بحيوية ونشاط وفاعلية .

وفيمايلي نقدم بعض المقترحات التي سوف تساعد المدرس في تنفيذ هذه الوحدة:

١) على المدرس مراجعة مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشت، والاهتمام بهذه المراجعة فهى الانطلاقة لدراسة موضعي الارتباط والانحدار .

٢) إعطاء الحرية للطلبة أثناء شرح الدرس في طرح الأسئلة والاستفسارات عن كل الأمور الغامضة عنهم، والرد عليها بشكل كامل وواضح .

٣) شرح المفاهيم بدقة وكتابة كل من الحقائق والتعاريف داخل براويز وإعادة كتابتها بالرموز وتوضيح مدلولاتها .

٤) تدريب الطلبة على كيفية تكوين الجداول الإحصائية واستخدام الحاسبات الصغيرة .

٥) تقديم الأمثلة برؤية وأضحة لتحقيق أهداف الدرس، ومناقشتها مع الطلبة فهى أساس التعلم وتكليف الطلبة بتمارين للواجب المنزلي ومناقشتها مع بداية كل حصة تالية .

٦) إعطاء الطلبة اختبار تقييمي نهاية تدريس كل بند لمعرفة ما حققه من أهداف في هذا البند .

http://e-learning-moe.edu.ye

٢ – ١ مـــراجـــعـــة

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف :

١– يثبت مفاهيم مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي ـ الوسيط – المنوال) .

٢– يثبت مفاهيم مقاييس التشتت (المدى – الانحراف المتوسـط – التباين – الانحـراف المعياري) .

٣– يثبت طرق حسابات كل من مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة مفاهيم وطرق حساب مقاييس النزعة المركزية .

الحصتان الثانية والثالثة : مراجعة مفاهيم وطرق حساب مقاييس التشتت .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

إرشادات وحلول بعض التمارين : (٢ – ١)

[١]

المقياس / الفقرة	المتوسط	المدى	الوسيط	الانحراف المتوسط	التباين	الانحراف المعياري
أ	١٠	٦	١٠	٢	٦,٥	٢,٥٤
ب	٦,٥	١٢	٧	٣,٥	٢٥	٥
جـ	٤	٢	٤	٠,٨	١	١

[٢] نكون جدولاً كما يلي :

س ر	ك ر	س ر × ك ر	(س ر – س̄)	(س ر – س̄)٢	|س ر – س̄| × ك ر	(س ر – س̄)٢ × ك ر
١	٨٨	٨٨	– ٢,٤	٥,٧٦	٢١١	٥٠٧
٢	٨٥	١٧٠	– ١,٤	١,٩٦	١١٩	١٦٧
٣	٩٢	٢٧٦	– ٠,٤	٠,١٦	٣٧	١٥
٤	٧٥	٣٠٠	٠,٦	٠,٣٦	٤٥	٢٧
٥	٧٨	٣٩٠	١,٦	٢,٥٦	١٢٥	٢٠٠
٦	٨٢	٤٩٢	٢,٦	٦,٧٦	٢١٣	٥٥٤
مجـ	٥٠٠	١٧١٦	–	–	٧٥٠	١٤٧٠

http://e-learning-moe.edu.ye

أ) المدى = ١٧ ، الانحراف المتوسط = ١,٥ .

ب) ع^{٢} = ٢,٩٤ ، ع = ١,٧ .

[٣] نكون جدول لمايلي :

الفئة	ك$_{ر}$	مركز الفئة س$_{ر}$	ك$_{ر}$ X س$_{ر}$	س$_{ر}$ – س̄	(س$_{ر}$ – س̄)^{٢}	|س$_{ر}$ – س̄| X ك$_{ر}$	(س$_{ر}$ – س̄)^{٢} X ك$_{ر}$
١ – ١٠	٢	٥,٥	١١	٢٧,٤–	٧٥٠,٨	٥٤,٨	١٥٠١,٦
١١ – ٢٠	٥	١٥,٥	٧٧,٥٠	١٧,٤–	٣٠٢,٨	٨٧	١٥١٤
٢١ – ٣٠	٢٩	٢٥,٥	٧٣٩,٥٠	٧,٤–	٥٤,٨	٢١٤,٦	١٥٨٩,٢
٣١ – ٤٠	٤٥	٣٥,٥	١٥٩٧,٥	٢,٦	٦,٨	١١٧	٣٠٦
٤١ – ٥٠	١٩	٤٥,٥	٨٦٤,٥٠	١٢,٦	١٥٨,٨	٢٣٩,٤	٣٠١٧,٢
مجـ	١٠٠	–	٣٢٩٠	–	–	٧١٢,٨	٧٩٢٨

س̄ = ٣٢,٩ .

أ) المدى = ٥٠,٥ – ٥,٥ = ٥٠ . ب) الانحراف المتوسط = ٧,١٣ .

جـ) التباين (ع^{٢}) = ٨٠ . د) ع = ٨,٩ .

٢ – ٢ الارتباط وأشكال الانتشار

~~عدد الحصص : (٨) حصص .~~

الأهداف :

١– يعرِّف الارتباط والانتشار .

٢– يرسم شكل الانتشار .

٣– يتعرَّف نوع الارتباط ودرجة قوته .

٤– يعرِّف معامل الارتباط بين متغيرين .

٥– يحسب معامل ارتباط بيرسون لمتغيرين .

٦– يحسب معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) لمتغيرين .

http://e-learning-moe.edu.ye

تنفيذ الدرس :

يتم تنفيذ الدرس في ثمان حصص على النحو التالي :

– الحصتان الأولى والثانية : الارتباط وشكل الانتشار .

– الحصتان الثالثة والرابعة : معامل ارتباط بيرسون .

– الحصتان الخامسة والسادسة : معامل ارتباط سبيرمان .

– الحصتان السابعة والثامنة : تمارين .

التقويم :

يقدم المدرس السؤال التالي أو سؤالاً مشابهاً له كتقويم للبند نهاية الحصة الثامنة :

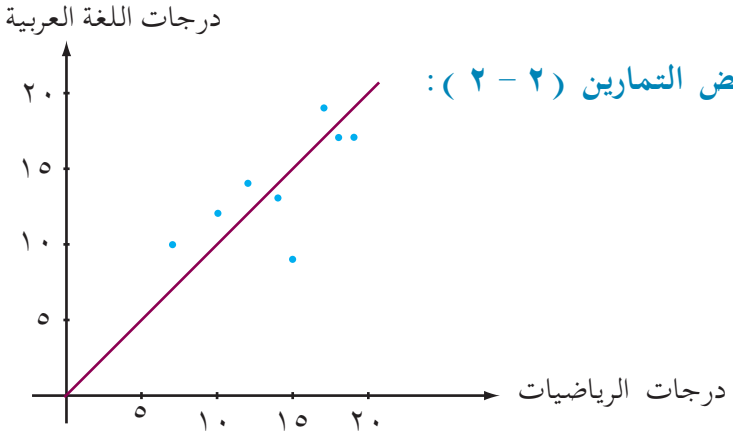
الجدول التالي يبين درجات خمسة طلاب في مادتي القرآن وعلومه والتربية الإسلامية :

قرآن وعلومه (س)	١٨	١٥	١٩	١٦	٢٠
التربية الإسلامية (ص)	١٧	١٥	١٧	١٧	١٩

– احسب معامل ارتباط بيرسون بين درجات الطلبة وبيّن نوعه .

إرشادات وحلول بعض التمارين (٢ – ٢) :

[١]



نوع الارتباط طردي موجب .

[٢] أ) موجب قوى . ب) سالب قوى . جـ) موجب متوسط .

د) سالب ضعيف . د) موجب ضعيف . و) لايوجد ارتباط .

http://e-learning-moe.edu.ye

[٣] ب) لحساب معامل ارتباط بيرسون نكون جدولاً كمايلي :

س	ص	(س ر – س̄)	(س ر – س̄)٢	ص ر – ص̄	(ص ر – ص̄)٢	(س ر – س̄)(ص ر – ص̄)
٥٤	٥٧	١	١	٤	١٦	٤
٤٩	٤٧	٤–	١٦	٦ –	٣٦	٢٤
٤٨	٥٢	٥ –	٢٥	١ –	١	٥
٤٢	٣٢	١١ –	١٢١	٢١ –	٤٤١	٢٣١
٢٤	٢٨	٢٩ –	٨٤١	٢٥ –	٦٢٥	٧٢٥
٥٣	٥٣	٠	٠	٠	٠	٠
٥٥	٥٥	٢	٤	٢	٤	٤
٦٢	٥٨	٩	٨١	٥	٢٥	٤٥
٦٥	٦٧	١٢	١٤٤	١٤	١٩٦	١٦٨
٧٨	٨١	٢٥	٦٢٥	٢٨	٧٨٤	٧٠٠
٥٣٠	٥٣٠		١٨٥٨		٢١٢٨	١٩٠٦

س̄ = ٥٣ ، ص̄ = ٥٣ .

$$\text{معامل ارتباط بيرسون } (ر) = \frac{\sum_{ر=١}^{د} (س_ر - س̄)(ص_ر - ص̄)}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{د} (س_ر - س̄)^٢ \sum_{ر=١}^{د} (ص_ر - ص̄)^٢}}$$

$$\therefore \quad ر = \frac{١٩٠٦}{١٩٨٨,٤} \approx ٠,٩٦$$

http://e-learning-moe.edu.ye

[٤] ب) لحساب معامل ارتباط سيبرمان للرتب بين س ، ص نكون الجدول التالي :

المسلسل	قيم س مرتبه تصاعدياً	رتبة س	قيم ص مرتبه تصاعدياً	رتبة ص
١	٣٨	١	١٠٥	١
٢	٤٢	٢,٥	١١٠	٢
٣	٤٢	٢,٥	١١٥	٣
٤	٤٩	٤	١١٨	٤
٥	٥٥	٥	١٢٥	٥
٦	٥٦	٦	١٤٧	٦
٧	٦٣	٧	١٥٠	٧
٨	٧٢	٨	١٦٠	٨

ثم نكون الجدول التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س – رتبة ص	ف ٢
٥٦	١٤٧	٦	٦	٠	٠
٤٢	١٢٥	٢,٥	٥	٢,٥ –	٦,٢٥
٧٢	١٦٠	٨	٨	٠	٠
٦٣	١١٨	٧	٤	٣	٩
٥٥	١٥٠	٥	٧	٢ –	٤
٤٩	١١٥	٤	٣	١	١
٣٨	١٠٥	١	١	٠	٠
٤٢	١١٠	٢,٥	٢	٠,٥	٠,٢٥
المجمـــــــــوع					٢٠,٥

http://e-learning-moe.edu.ye

معامل ارتباط سبيرمان (ر) = ١ – $\frac{٦ \sum_{ن=١}^{ن} ه^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$.

$= ١ - \frac{٦ \times ٢٠,٥}{٨ (٦٣)}$

$= \frac{٣٨١}{٥٠٤} \approx ٠,٧٦$

[٥]

أ – نتبع خطوات حل السؤال الثالث نفسها .

ب – نتبع خطوات حل السؤال الرابع نفسها .

٣ – ٢ الانحـــدار

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف :

١– يعرِّف مفهوم الانحدار الخطي .

٢– يحسب معاملي انحدار ص على س ، وانحدار س على ص .

٣– يعرِّف العلاقة بين معامل انحدار ص على س ومعامل الارتباط .

٤– يعرِّف العلاقة بين معامل انحدار س على ص ومعامل الارتباط .

٥– يكتب معادلتي انحدار ص على س ، س على ص .

٦– يستخدم معادلة الانحدار الخطي للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر.

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الانحدار وحساب معاملي الانحدار .

الحصة الثانية : العلاقة بين معامل انحدار ص على س أو معامل انحدار س على ص ، ومعامل الارتباط للمتغيرين س ، ص .

الحصة الثالثة : معادلة الانحدار الخطي واستخدامها للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر.

http://e-learning-moe.edu.ye

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين صفية .

التقويم :

يقدم المدرس السؤال التالي كتقويم نهاية الحصة الخامسة، أو أى سؤال آخر مشابه له :

إذا كانت $\bar{س} = ١٢$ ، $ع_{س} = ٧$ ، $\bar{ص} = ١٠$ ، $ع_{ص} = ٤$ ، $ر = ٠,٨٢$.

اكتب معادلة الانحدار التي نتنبأ فيها بقيم ص بدلالة قيم س ، ثم أوجد قيمة ص عندما تكون قيمة س = ٩ .

إرشادات وحلول بعض التمارين (٢ - ٣) :

[١] أ) لحساب القيمة المتوقعة لـ ص نستخدم العلاقة :

$ص = ا\ س + ب$.

وفي هذه الحالة $ا = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} = ٠,٧٠ \times \frac{٢٠}{١٥} = ٠,٩٣$.

$ب = \bar{ص} - ا\bar{س} = ١٠٠ - ٥٠ \times ٠,٩٣ = ٥٣,٥$.

$\therefore ص = ٠,٩٣ \times ٨٢ + ٥٣,٥ = ١٢٩,٧٦$.

ب) لحساب القيمة المتوقعة لـــ س نستخدم العلاقة :

$س = ا\ ص + ب$.

وفي هذه الحالة $ا = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}} = ٠,٧٠ \times \frac{١٥}{٢٠} = ٠,٥٢٥$.

$ب = \bar{س} - ا\bar{ص} = ٥٠ - ٠,٥٢٥ \times ١٠٠ = -٢,٥$.

$\therefore س = ا\ ص + ب = ٠,٥٢٥ \times ٧٥ - ٢,٥ \approx ٣٦,٩$.

[٢] معادلة انحدار ص على س هي :

$ص = ا\ س + ب$.

لذا يلزمنا إيجاد قيمة ا ، ب .

لذلك نكون الجدول التالي :

http://e-learning-moe.edu.ye

س	ص	س × ص	س^{٢}	ص^{٢}
٢	١٨	٣٦	٤	٣٢٤
٤	١٢	٤٨	١٦	١٤٤
٥	١٠	٥٠	٢٥	١٠٠
٦	٨	٤٨	٣٦	٦٤
٨	٧	٥٦	٦٤	٤٩
١١	٥	٥٥	١٢١	٢٥
٣٦	٦٠	٢٩٣	٢٦٦	٧٠٦

$\bar{س} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$ ، $\bar{ص} = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$.

$$أ = \frac{د \sum_{ر=١} س_ر ص_ر - (\sum_{ر=١} س_ر)(\sum_{ر=١} ص_ر)}{د \sum_{ر=١} س_ر^{٢} - (\sum_{ر=١} س_ر)^{٢}} .$$

$$= \frac{٦ \times ٢٩٣ - ٦٠ \times ٣٦}{٦ \times ٢٦٦ - (٣٦)^{٢}} = -١,٣٤ .$$

ب = $\bar{ص}$ − أ $\bar{س}$ = ١٠ − (− ١,٣٤) × ٦ = ١٨,٠٤ .

∴ معادلة انحدار ص على س هي :

ص = أ س + ب .

= − ١,٣٤ س + ١٨,٠٤ .

[٣] معادلة انحدار ص على س هي : ص = أ س + ب .

ولإيجاد هذه المعادلة نتبع نفس الخطوات في السؤال الأول ، ومنها نجد أن عدد العلب المعابه من بين ١٥٠ علبة تقدر بـ ١٧ علبة .

http://e-learning-moe.edu.ye

[٤] أ) يتم حسابها كما في السؤال رقم [١] فيكون ا = ٠,٥ .

نحسب ع$_{س}$ من العلاقة ع$_{س}$ = $\frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} (\text{س}_ر - \bar{\text{س}})^2}{د - ١}$.

وكذلك ع$_{ص}$ من العلاقة ع$_{ص}$ = $\frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} (\text{ص}_ر - \bar{\text{ص}})^2}{د - ١}$.

فيلزم تكوين الجداول التالية :

ص	ص – $\bar{ص}$	(ص – $\bar{ص}$)^2
٦	١,٥–	٢,٢٥
٨	٠,٥	٠,٢٥
٦	١,٥ –	٢,٢٥
١٠	٢,٥	٦,٢٥
٨	٠,٥	٠,٢٥
٥	٢,٥ –	٦,٢٥
١٠	٢,٥	٦,٢٥
٧	٠,٥ –	٠,٢٥
٧	٠,٥ –	٠,٢٥
٨	٠,٥	٠,٢٥
٧٥	٠	٢٤,٥٠

س	س – $\bar{س}$	(س – $\bar{س}$)^2
٧	٠	٠
٩	٢	٤
٤	٣–	٩
١٠	٣	٩
٦	١ –	١
٧	٠	٠
٨	١	١
٨	١	١
٥	٢ –	٤
٦	١ –	١
٧٠	٠	٣٠

$\bar{ص} = \frac{٧٥}{١٠} = ٧,٥$ ، $\bar{س} = \frac{٧٠}{١٠} = ٧$.

ع$_{ص}$ ≈ ٢,٧ ع$_{س}$ ≈ ٣,٣ .

معامل ارتباط انحدار ص على س = ا × $\frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$.

س = ٠,٥ × $\frac{٢,٥}{٣,٣}$ = ٠,٣٨ .

[٥] خطوات السؤال رقم [٣] نفسها .

http://e-learning-moe.edu.ye

٢ - ٤ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة .

الهدف :

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار :

يتم تنفيذ هذا الاختبار في حصة واحدة، يقدم فيها المدرس الاختبار الذي في هذا البند، أو اختباراً آخر يقوم بإعداده بنفسه شريطة أن يحقق أهداف الوحدة .

والجدول التالي يبين أرقام الأسئلة اختبار هذا البند والأهداف المرتبط بها .

رقم السؤال	رقم الهدف المقاس
١	٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩
٢	٥ ، ٦
٣	٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

- على المعلم إرشاد الطلبة إلى الاختبار الذي في كتاب التمارين قبل إعطاء الاختبار المعد بالدليل كتدريب على الاختبار .
- يقوم المدرس بتصحيح أوراق إجابات الطلبة ويرصد الأخطاء التي يقع فيها الطلبة، ومن خلال ذلك يتعرف على الأهداف التي لم تتحقق .
- يراجع المدرس الدروس التي لم تتحقق أهدافها بقدر الإمكان، وحسب الوقت المتاح له .

http://e-learning-moe.edu.ye

الاختبار

[١] الجدول التالي يمثّل درجات خمسة طلاب في مادتي المنطق والفلسفة :

المنطق (س)	١٢	١٥	١٦	١٨	١٩
الفلسفة (ص)	١٣	١٦	١٤	١٨	١٩

أ) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س ، ص وبيّن نوعه .

ب) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص .

جـ) اذكر درجة الارتباط .

[٢] إذا كانت $\bar{س} = ٢٠$ ، $\bar{ص} = ١٧$ ، $ع_{س} = ٥$ ، $ع_{ص} = ٣$ ، $ر = ٠,٨٠$

أ) ماذا تعني كل من $\bar{س}$ ، $ع_{ص}$ ، $ر$.

ب) احسب القيمة المتوقعة لـ ص عندما س = ٢٣ .

[٣] ليكن لدينا البيانات التالية :

س	٦	٨	٩	١٥	١٢	١٠
ص	١٠	٨	١٢	١١	١٤	١٦

أوجد :

أ) معادلة انحدار ص على س ، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١١ .

ب) معامل الارتباط في حالة انحدار ص على س .

http://e-learning-moe.edu.ye

قائمة المصطلحات

شكل الانتشار	Scatter Diagram
معامل الارتباط	Correlation Coefficient
الارتباط الخطي	Linear Correlation
معامل ارتباط بيرسون	Pearson's Correlation Coefficient
معامل ارتباط سبيرمان للرتب	Spearman's Correlation of rank Coefficient
الانحدار	Regression
التنبؤ	Prediction
الانحدار الخطي	Linear Regression

المراجع :

١ – فريد أبو زينة، لطفي لطيفة، خليل الخليلي [الطرق الإحصائية في التربية والعلوم الإنسانية . الجزء الأول (الأردن ١٩٨١م)]

٢ – عايش محمود زيتون : أساسيات الإحصاء الوصفي، دار عمار للنشر والتوزيع عمان الاردن ١٩٨٤م .

٣ – د. حبيب علي إسماعيل (المدخل للإحصاء)، جامعة صنعاء.

٤ – أ. ثابت عزيز الشاروني، [مبادئ علم الإحصاء، (مصر العربية)] .

٥ – د. مدني دسوقي (مبادئ في علم الإحصاء) .

٦ – د. أنيس كنجو (الإحصاء) .

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الثالثة التكامـــــل

جدول توزيع الحصص :

البنـد	الموضـــوع	عدد الحصص
٣ – ١	التكامل غير المحدد	٥
٣ – ٢	التكامل المحدد	٣
٣ – ٣	تطبيقات التكامل « المساحات »	٥
٣ – ٤	اختبار الوحدة	١
المجمـــوع		١٤

أهـداف الوحدة :

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة لهذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يُعرِّف التكامل غير المحدد .

٢ – يستنتج أن تكامل دالة يساوى الدالة الأصلية .

٣ – يتعرَّف خواص التكامل غير المحدد .

٤ – يُعرِّف التكامل المحدد وخواصه .

٥ – يوجد مساحات مناطق مستوية بواسطة التكامل المحدد .

المقـدمـــة

يلعب علم التفاضل والتكامل دوراً أساسياً في صياغة القوانين التي تحكم الظواهر الطبيعية والكيميائية والفلكية والاقتصادية وغيرها .

وقد مدنا علم التفاضل والتكامل بطرق سهلة لحساب بعض الكميات الطبيعية مثل سرعة جسم متحرك عند أية لحظة ومعدل تغير كميات معينة بالنسبة للزمن أو بالنسبة

http://e-learning-moe.edu.ye

لكميات أخرى مرتبطة بها، وكذلك طرق حساب المساحات المحددة بمنحنيات عامة وغيرها.

ولقد راعينا في هذه الوحدة أن تكون المفاهيم الأساسية سهلة وبسيطة لتكون القاعدة الأساسية للطالب لدراسة الرياضيات العليا بشكل أفضل .

لمحة تاريخية :

تعود نشأة حساب التفاضل والتكامل إلى مسألتين قديمتين: تبحث أولاهما في تعيين مماس منحنى مفروض عند نقطة من نقاطة، وتبحث الثانية في حساب مساحة منطقة مستوية يحدها منحنى محدد، ويعد حل المسألة الثانية منطلقاً لتسمية حساب التكامل.

وقد عثر بعض الباحثين على مجموعة أوراق البردى، يعود تاريخها إلى عام (١٦٥٠) ق . م وفيها ٨٥ مسألة يدّعى كاتبها أنه نقلها عن أوراق قديمة ، وتذكر المسألة الخمسون منها أن مساحة دائرة قطرها تسع وحدات تكافئ مساحة مربع طول ضلعه ثمان وحدات وقد وجد الفراعنة قيمة تقريبية لـ π هى ٣,١٤ .

ولم يقتصر اهتمام اليونانين بعد ذلك على حساب مساحات الدوائر بل حاولوا حساب مناطق مستوية تحدها منحنيات اخرى .

وفي القرن السابع عشر وضع كل من :

– ليبنز الألماني (1646 - 1716) Gottfried Wilhelm Leibniz -

– نيوتن الإنجليزي Sir Isaac Newton (1642 - 1727)

تعاريف للتكامل المحددلحساب مفهوم المساحة على أسس عامة وقوية ، ولكن هذه التعاريف لم تحط بكل المواقف الممكنة للمساحة ولكن أثارت مفهوم المساحة عامة وجعلته حديثاً يدور بين الرياضيين، وبقي الأمر لرياضيين آخرين ليوسعوا هذا التعميم ويصيغوه على أسس رياضية أفضل .

وقد طبق جاكوب برنولي (1654 - 1705) Jakob Bernoulli

وجوهان برنولي (1667 - 1748) Johann Bernoulli

التفاضل والتكامل في مسائل مختلفة وقدما الجديد في حساب التغير .

كما قدم الجديد في التفاضل والتكامل كل من :

http://e-learning-moe.edu.ye

– بروك تيلور Brook Taylor (1685 - 1731)

– كولن مكلورين Colin Maclaurin (1698 - 1746)

– او يلر Leonhard Euler (1707 - 1783)

– لاجرانج Joseph Louis Lagrange (1749 - 1827)

أما لابلاس Pierre - Simon Laplace(1749-1827) ، فقد قدم المعادلة المشهورة باسمه

$$\frac{6^2g}{6x^2} + \frac{6^2g}{6y^2} + \frac{6^2g}{6z^2}$$

إن مفهوم محول لابلاس كان الأساس للمبرهنة التي قدمها هينسن بعد حساب التفاضل والتكامل ذو العمليات .

وقد وضع الرياضي الفرنسي كوشي Augustin Louis Cauchy (1781- 1857) التفاضل والتكامل على أسس منطقية قوية ، فوضع تعريفه للتكامل المحدد على أنه نهاية مجاميع مساحات مستطيلة ، ثم أطلق عليه « تكامل منجولى كوشي » وحيث يتطلب تعريفه للتكامل المحدد أن تكون الدالة التى يتم تكاملها متصلة .

وقد قدم جالوا (1811 - 1832) أفكاراً في تكامل الدوال الجبرية ذات متغير واحد والتي تسمى حالياً بتكامل آبل .

ويُعد ريمان Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) من أكثر الرياضيين تأثراً بالرياضيات الحديثة من خلال أعماله في نظرية الدوال ذات المتغير المركب وفي السطوح الريمانية التي قدّمت النواحي التوبولوجية في التحليل وفي تطبيق أفكاره في الدوال الهندسية الزائدة والآبلية، حيث قدم تعريف التكامل الريمانى .

أما الرياضي الفرنسي جاستون داربو (1842 - 1917) الذى سميت المجاميع باسمه فقد بيّن أن الدالة المحددة فوق فترة ماتكون لها تكامل ريماني فوق هذه الفترة إذا وفقط إذا كانت مجموعة عدم الاتصال على هذه الفترة هى مجموعة مقياسها الصفر وهذا يعنى أن الدالة التي لها عدد نهائى من نقاط عدم الاتصال المحددة على فترة يمكن أن يكون لها تكامل ، ولإيجاده يمكن استخدام تعريف ريمان للتكامل.

http://e-learning-moe.edu.ye

تعريف ريمان للتكامل المحدود للدالة د (س) هو كالآتي :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ء س = \text{نهـا}_{\Delta س \leftarrow 0} \cdot \sum_{ر=1}^{ح} (ل_ر \ \Delta س_ر) .$$

حيث $\Delta س_ر$ هى فترات صغيرة تجزئ محور السينات ، و $ل_ر$ هي أكبر حد سفلي للدالة د (س) في الفترة $\Delta س_ر$ بشرط أن هذه النهاية تساوي النهاية التالية :

$$\text{نهـا}_{\Delta س \leftarrow 0} \cdot \sum_{ر=1}^{ح} ع_ر \ \Delta س_ر .$$

حيث $ع_ر$ هو أصغر حد علوي للدالة د (س) في الفترة $\Delta س_ر$.

وتسمى النهاية الأولى مجموع داربو السفلي ، وتسمى النهاية الثانية مجموع داربو العليا .

الخلفية العلمية :

إن الدالة الأصلية « أو التكامل غير المحدود » ما هي إلاّ عملية عكسية للاشتقاق ، فمثلاً إذا كانت $د'(س) = ٣ س^٢$.

فإن $د(س) = س^٣ + ث$.

وإذا علمت المشتقة تستطيع الحصول على الدالة الأصلية، وبالمثل إذا علمت المشتقة الثانية تسطيع الحصول على الدالة الأصلية بتكامل المشتقة الثانية مرتين .

إن كل دالة قابلة للاشتقاق هي دالة متصلة والعكس غير صحيح ، وفي التكامل كل دالة متصلة قابلة للتكامل والعكس ليس بالضرورة صحيحاً، أي أن هناك دوال قابلة للتكامل وقد تكون غير متصلة. والتكامل الذي ليس له قيمة حقيقية محدودة يسمى بالتكامل غير المحدد، بينما التكامل الذى له قيمة محدودة يُسمى بالتكامل المحدد .

وفي التفاضل قواعد للمشتقات ، في التكامل أيضاً توجد قواعد شهيرة للتكاملات، ومن أهم القواعد التي سوف نستخدمها في هذه الوحدة :

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\int س^{د} \, ء س = \frac{س^{د+١}}{د+١} + ث \quad \text{حيث } د \neq -١ .$$

وللتفاضل تطبيقات هندسية وفيزيائية وبالمثل للتكامل تطبيقات مماثلة ؛ مثلاً : إذا عُلم ميل المماس لمنحى دالة تستطيع بالتكامل أن تحصل على معادلة المنحى ، وإذا عُلمت السرعة تستطيع الحصول على المسافة .

وبواسطة التكامل نستطيع إيجاد مساحة لأشكال مستوية مختلفة مثل المضلعات غير المنتظمة، وهنا نستطيع القول إن كل تكامل محدد لايعني دائماً مساحة، ولكن كل مساحة يمكن التعبير عنها بتكامل، وبصورة عامة فإن المساحة المحصورة ببيان الدالة د (س) والمستقيمين س = ا ، س = ب هي سطـ = $\int_{ا}^{ب} |$ د(س) $|$ ء س . وعند إيجاد مساحة أي شكل مستوى يجب أن نتعرف أولاً على المعادلة العامة له ، ثانياً نمثله بيانياً في المستوى الأحداثي .

أما إذا كان بيان الدالة د في الفترة [ا ، ب] ؛ جزء منه يقع تحت المنحنى وفوق الفترة [ا، جـ] حيث جـ ∈ [ا ، ب] ؛ وفي الفترة [جـ ، ب] يقع فوق المنحنى وتحت الفترة [حـ ، ب] فإن :

$$سطـ = \int_{ا}^{جـ} د(س) \, ء س + \int_{جـ}^{ب} - د(س) \, ء س .$$

أو بصورة أخرى :

$$سطـ = \int_{ا}^{جـ} | د(س) | \, ءس + \int_{جـ}^{ب} | د(س) | \, ء س .$$

وبناءً على ماتقدم ؛ لإيجاد المساحة المحصورة ببيان الدالة د(س) والمستقيمين س = ا ، س = ب نتبع مايلي :

– إيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني .

– التعرف على موقع بيان الدالة بالنسبة لمحور السينات من خلال التعويض عن بعض القيم لـــ س .

الرموز المستخدمة في هذه الوحدة :

$\int$ د (س) ء س التكامل غير المحدود للدالة د (س) بالنسبة لـ س .

الرمز $\int$ علامة التكامل ، د (س) الدالة المكاملة؛ ء س متغير التكامل .

http://e-learning-moe.edu.ye

$\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س التكامل المحدد للدالة د (س) بالنسبة لـ س من س = أ إلى س = ب .

حيث أ الحد الأدنى للتكامل، ب الحد الأعلى للتكامل .

سط$_{أ}^{ب}$ تعنى المساحة المحصورة ببيان الدالة والمستقيمين ،

س = أ ، س = ب .

توجيهات طرائقية :

- يمهد للتكامل بإعطاء بعض الدوال وإيجاد مشتقة كل منها ، ثم يعطى مشتقات بعض الدوال ويكامل مشتقة كل دالة على حدة للتعرف على الدالة الأصليةالتي عُلمت مشتقتها « أي العملية العكسية للتفاضل »؛ ليوضح أن عملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل .
- يعطي تعريف التكامل غير المحدد .
- يعطي مشتقة لدالة ما ، ثم يناقش الطلبة عن ايجاد الدالة الأصلية التي عُلمت المشتقة الأولى لها؛ التى ستكون الإجابة عنها ليست وحيدة وذلك بسبب اختلاف العدد الثابت ث .
- يوضح أن عملية التكامل تساوي الدالة الأصلية للدالة المراد تكاملها ؛ أى أن تكامل مشتقة الدالة الأصلية يساوي الدالة الأصلية التي لدينا مشتقتها؛ ويتم ذلك من خلال عرض بعض الأمثلة الكافية .
- يؤكد على التحقق من صحة التكامل من خلال اشتقاق الناتج ومقارنته مع الدالة المراد تكاملها ، فمثلاً $\int$ د (س) ء س = ل (س) ، $\frac{ء}{ء س}$ ل (س) = د (س) .
- يوضح قواعد وخواص التكامل غير المحدود بأمثلة متنوعة وكافية .
- يتم التأكد من استيعاب الطلبة لقواعد وخواص التكامل غير المحدد من خلال التدريبات الصفية والواجبات المنزلية .
- يعطى مبرهنة العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد ، ثم يوضح الفرق بينهما .
- يعطى خواص التكامل المحدد مدّعمة بالأمثلة المتنوعة، ثم تعطى عليها تدريبات صفية مكثفة .

http://e-learning-moe.edu.ye

– يمهد في تطبيقات التكامل بالنسبة للمساحة كمايلي :

١) يوضح كيفية إعادة تعريف دوال القيمة المطلقة واستخدام خواص التكامل المحدد .

٢) يوضح كيفية إيجاد المساحة بواسطة التكامل للمناطق المستوية عندما تكون الدالة موجبة وعندما تكون الدالة سالبة .

٣) يؤكد على أن قيمة المساحة موجبة دائماً أى أن :

سطح $= \int_{أ}^{ب} |د(س)|$ ء س ، مهما كان موقع بيان الدالة بالنسبة لمحور السينات .

وذلك من خلال الأمثلة والتدريبات الصفية الكافية ، وكيفية تمثيل المنطقة في المستوى .

– إذا كانت المنطقة تقع تحت منحنى الدالة وفوق الفترة [أ ، ب] فإن

سطح $= \int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س .

إما إذا كانت المنطقة تقع فوق منحنى الدالة وتحت الفترة [أ ، ب]

فإن : سطح $= \int_{أ}^{ب}$ – د (س) ء س .

– وإذا كان جزء من المنحني فوق الفترة [أ ، جـ] ، الجزء الآخر تحت الفترة [جـ ، ب].

فإن : سطح $= \int_{أ}^{جـ}$ د (س) ء س – $\int_{جـ}^{ب}$ د (س) ء س .

– يوضح كيفية إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات وذلك بإيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات أى عند ص = ٠ مستعيناً بالأمثلة الواردة في كتاب الطالب .

– يكثف التطبيقات المباشرة والتدريبات الصفية لكل مفهوم يعطى .

– عدم الانتقال من موضوع إلى آخر إلا بعد التأكد من مدى استيعاب الطلبة للموضوع السابق نظراً للترابط بين مواضيع هذه الوحدة .

– يعطى واجباً نهاية كل حصة وفقاً لماينجز فيها .

– يتابع كل واجبٌ يعطى لاية حصة في الحصة التالية لها، ومن خلال ذلك يُعالج أخطاء الطلبة .

http://e-learning-moe.edu.ye

٣ - ١ التكامل غير المحدد

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف :

١- يعرِّف التكامل غير المحدد .
٢- يتعرَّف ثابت التكامل، وكيفية تحديده .
٣- يستنتج أن التكامل غير المحدد لدالة يساوي الدالة الأصلية .
٤- يتعرَّف خواص التكامل غير المحدود وقواعدة .
٥- يحل مسائل تطبيقية على التكامل غير المحدد .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

- الحصتان الأولى والثانية : تعريف التكامل غير المحدد، ثابت التكامل ، الدالة الأصلية .
- الحصتان الثالثة والرابعة : قواعد وخواص التكامل غير المحدد وأمثلة عليها .
- الحصة الخامسة : مسائل تطبيقية .

التقويم :

احسب $\int (س^{٢} - \sqrt{س} + \frac{٣}{س^{٢}})$ ء س .

إرشادات وإجابات تمارين (٣ - ١) :

[١] يُعطى كتدريب للطلبة خلال الحصتين الأولى والثانية .

[٢] أ) $س^{٣} - ٢س^{٢} + ث$.

ب) $\frac{س^{٤}}{٤} + س^{٣} + ٥ س + ث$.

جـ) $\frac{٣}{٢} ع^{٢} + \frac{٥}{ع} + ث$.

د) $\frac{-١}{٣ز^{٣}} - \frac{٣}{٢ز^{٢}} - ٥ز + ث$.

هـ) $\frac{س^{٤}}{٤} - س^{٣} + \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ث$.

و) $\frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - س^{٣} + ث$.

ز) $\frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٦}{١١} س^{\frac{١١}{٦}} + ث$.

ح) $\frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$.

http://e-learning-moe.edu.ye

ط) $\frac{٤}{٣}س^{٣}+٣س^{٢}+٩س+ث$. ي) $-\frac{١}{ع}-٢ع+\frac{ع^{٣}}{٣}+ث$.

ك) $\frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}}-\frac{٩}{٢}س^{\frac{٢}{٣}}+ث$. ل) $\frac{٣}{١٠}س^{\frac{١٠}{٣}}-\frac{١٢}{١١}س^{\frac{١١}{٦}}+٣س^{\frac{١}{٣}}+ث$.

[٣] $ل'(س)=-٣س^{-٤}=\frac{-٣}{س^{٤}}$ [٤] $ص=\frac{-٥}{٣}س^{٣}+٢س+\frac{٨}{٣}$.

[٥] $س^{٣}-س^{٢}+س+١٩$ [٦] $\frac{س^{٣}}{٣}-\frac{س^{٢}}{٢}+س+\frac{٧}{٦}$.

٣ – ٢ التكامل المحدد

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١– يعرّف التكامل المحدد .

٢– يتعرّف على خواص التكامل المحدد .

٣– يحل تمارين ومسائل على التكامل المحدد .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التكامل المحدد وخواصه .

الحصتان الثانية والثالثة : تمارين صفية .

التقويم :

احسب $\int_{١}^{٤}(٣س^{٢}-٣\sqrt{س}-\frac{١}{س^{٢}})$ د س .

إرشادات وإجابات تمارين (٣ – ٢) .

[١] $\frac{٢٥٥}{٤}$ [٢] ١١٦ [٣] $\frac{-٥٦}{٣}$

[٤] ٤ [٥] $\frac{٥٦}{٣}$ [٦] ٥٢

[٧] صفر [٨] $\frac{٥٢}{٣}$ [٩] – ٣٢

http://e-learning-moe.edu.ye

[١٠] ٣ [١١] $-\frac{١٤٨}{٥}$ [١٢] $\frac{٢٦}{٣}$

[١٣] ١٢ [١٤] $\frac{٥}{٢}$ [١٥] $\frac{١}{١١٠}$

[١٦] ٢ [١٧] $\frac{٢١٤}{٣}$ [١٨] ١٠

[١٩] $\frac{٦٤}{٣}$

٣ - ٣ تطبيقات التكامل في المساحات

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف :

١- يوجد مساحة منطقة مستوية فوق أو تحت محور السينات .

٢- يوجد المساحة المحصورة بين منحنى دالة ومحور السينات .

٣- يوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة والمستقيمات .

س = أ ، س = ب ، ص = ٠ .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المساحة فوق وتحت محور السينات .

الحصة الثانية : المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات .

الحصة الثالثة : المساحة المحصورة بين د(س) ، س = أ ، س = ب ، ص = ٠

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين ومسائل .

التقويم :

احسب المساحة المحصورة بين المنحنى ص = $س^{٣}$ - س ومحور السينات .

إرشادات وإجابات تمارين (٣ - ٣) .

[١] ١٨وحدة مساحة [٢] ٢٠ وحدة مساحة .

[٣] $\frac{١١}{٤}$ [٤] $\frac{١٦}{٣}$

http://e-learning-moe.edu.ye

[٥]	$\frac{١١}{٤}$	[٦]	$\frac{٤٤}{٣}$
[٧]	$\frac{٤}{٣}$	[٨]	$\frac{٣٢}{٣}$
[٩]	$\frac{٤}{٣}$	[١٠]	$\frac{٨١}{٢}$

٣ – ٤ اختبار الوحدة

عدد الحصص : حصة واحدة .

الهدف : يقيس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في حصة واحدة على النحو التالي :

يقدم الاختبار الذي في الدليل للطلاب أو اختباراً مشابهاً بحيث يغطي أهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

رقم السؤال	الفقرة	رقم الهدف
[١]	أ	١
	ب	٢
	جـ	١ ، ٣
[٢]	أ	٤
	ب	٢ ، ٣
[٣]		٥

http://e-learning-moe.edu.ye

الاختبـــار

أجب عن الأسئلة التالية :

[١] أ) أكمل : $\int س^{د}$ ء س = ٠٠٠ حيث د $\neq -١$.

ب) إذا كانت د (س) = $-٤ س^{-٥}$ ، ل (س) = $\frac{١}{س^{٤}}$.

أثبت أن ل (س) دالة أصلية لـ د (س) .

جـ) احسب $\int (س - \sqrt{٧س} + \frac{٢}{س^{٢}})$ ء س .

[٢] أ) احسب $\int_{٠}^{٣} (س^{٢} - ٢ س + ١)$ ء س .

ب) إذا كان $\frac{ء ص}{ء س} = ٣ س^{٢} + ٢ س$ أوجد معادلة المنحنى ص إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

[٣] أوجد المساحة المحصورة بالمنحنى ص = ٤ س – $س^{٣}$ والمحور السيني .

http://e-learning-moe.edu.ye

قائمة المصطلحات

علم التفاضل والتكامل « علم الحسبان »	Calculus
التكامل	Integration
الدالة الأصلية .	Antiderivative of a Function
تكامل غير المحدد	Indefinite integral.
تكامل محدد	Definite integral
الحد الأدنى	Lower bound
الحد الأعلى	Upper bound
حساب القياس	Modulus arithmetic

المراجع :

١ – إسهام علماء المسلمين في الرياضيات، علي عبدالله الدفاع ، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، دار الشروق، بيروت والقاهرة، الطبعة الأولى، ١٩٨١م.

٢ – موسوعة علماء الرياضيات، عدنان دعنا، دار أسامة للنشر والتوزيع الأردن، الطبعة الأولى، ٢٠٠١م .

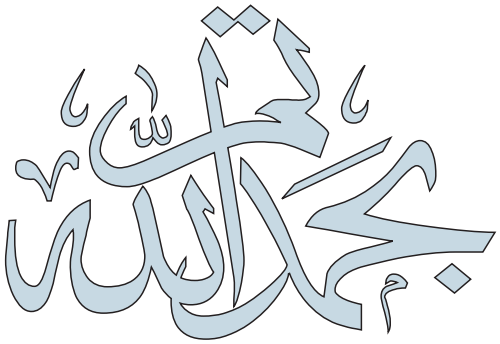
٣ – أساسيات التفاضل والتكامل، خالد قاسم سمور، دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الأولى، ٢٠٠٢م .

٤ – سلسلة الشامل في الرياضيات . (٢) التفاضل والتكامل الجزء الثاني، محمد أبو صالح وآخرون ، دار الفرقان، عَمَّان، الطبعة الثانية، ١٩٨٤م .

٥ – التفاضل والتكامل الجزء الأول، عدنان عوض وآخرون، دار الفكر للنشر والتوزيع، عمَّان، ١٩٩٠م .

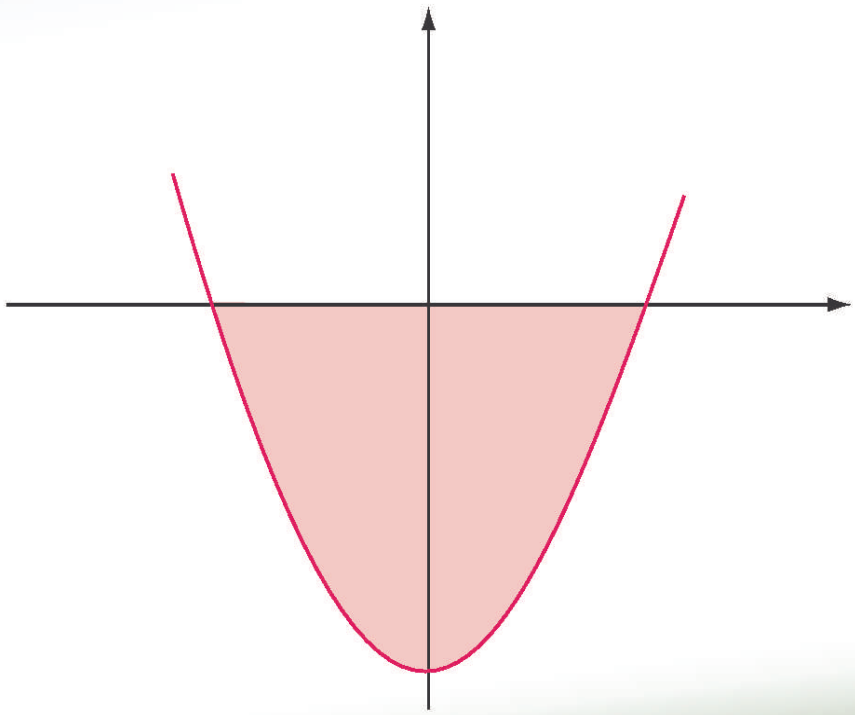
٦ – حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، الجزء الأول، ج.ب. توماس منشورات جامعة الفاتح، الطبعة الثانية، ١٩٧٩م .

http://e-learning-moe.edu.ye



http://e-learning-moe.edu.ye

http://e-learning-moe.edu.ye



http://e-learning-moe.edu.ye