وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي)

حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم
١٤٣٣هـ/ ٢٠١٢م

http://e-learning-moe.edu.ye

e-learning

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

دليل المعلم
لتدريس كتاب
الرياضيات
للصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي)

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الإله علي حمد الحوري	أ. سالمين محمد باسلوم /منسقاً
د. عوض حسين البكري	د. محمد علي مرشد
د. محمد رشاد الكوري	أ. يحيى بكار مصفر
د. محمد حسن عبده المسوري	أ. عبدالباري طه حيدر
د. عبدالله سالم بن شحنة	أ. نصر محمد بدر
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري	أ. جميلة إبراهيم الرازحي
د. علي شاهر القرشي	أ. عادل علي مقبل البنا
أ. مريم عبدالجبار سلمان	أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان

أ. يحيى محمد الكنز

فريق المراجعة والتطوير:

د. أمة الآله علي حمد الحوري	أ. عبدالحكيم حسن السفياني
أ. شرف عثمان الخامري	أ. يحيى محمد الكنز
أ. جميلة إبراهيم الرازحي	أ. مريم عبدالجبار سلمان

الإخراج الفني

الصف الطباعي والتصميم: جلال سلطان علي إبراهيم

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

http://e-learning-moe.edu.ye

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.

أ/ علي حسين الحيمي.	د/ صالح ناصر الصوفي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	أ.د/ صالح عوض عرم.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله لملس.	د/ شكيب محمد باجرش.
أ/ منصور علي مقبل.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ/ محمد هادي طواف.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ/ عبدالله علي إسماعيل.	د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٤٨) وتاريخ ٤/ ٦/ ٢٠٠٣م طباعة هذا الدليل وتوزيعه للتجريب للعام الدراسي ٢٠٠٣/ ٢٠٠٤م

الطبعة الثانية

http://e-learning-moe.edu.ye

بسم الله الرحمن الرحيم

التقديم

أعزائي المعلمين، عزيزاتي المعلمات:

لأن التطوير كلٌّ لا يتجزأ .. كان لا بد من أن تخضع المناهج التعليمية الحد يثة – في طرق تدريسها – إلى مرجعية واحدة موحدة، بدلاً من إبقائها خاضعة لمنطق تعددية الاجتهادات وتباينها، ولما تستوجبه ضرورات تطوير سبل التواصل بين طرفي العملية التد ريسية، بحيث تعم الفائدة على المعلم والطالب في آن واحدٍ معاً .. كان لا بد من أن يكون هناك د ليل مصاحب لكل كتاب مدرسي حتى يتحقق هدف اكتمال التطوير في هذا الجانب ليسهم في توضيح أسس الفلسفة التربوية ومبادئ السياسة التعليمية والمنطلقات والأهداف العامة للنظام التعليمي في اليمن، وكذلك الأهد اف الخاصة لكل مادة من المواد، وأساليب واستراتيجيات التعليم والتقويم والخطة التدريسية والإرشادات العامة لتدريس الكتاب المدرسي.

نأمل من كل معلم ومعلمة اعتبار «دليل المعلم» مفتاحاً لاستيعاب مادة تخصصهم التدريسي، وأداة لتمكين طلابهم من فهم محتواها.

ومما لاشك فيه أن هذا الدليل هو محاولة أولية لايستغني عن ملاحظات ومقترحات المعلمين الذين يضطلعون بأعظم مهنة وأسمى رسالة، لإثراء وتطوير هذا الدليل في طبعاته التالية في الجانبين العلمي والمنهجي مرحبين بكل ملاحظاتكم.

والله ولي الهداية والتوفيق ،،،

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

http://e-learning-moe.edu.ye

المحتويات

الموضوع		الصفحة
مقدمة الدليل		٦
أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية		٧
أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي)		٩
جدول توزيع الحصص على الوحدات		٩
الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي		١٠
منهجية إعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه		١٣
منهجية إعداد كتاب التمارين وكيفية استخدامه		١٧
منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه		١٧
الوحدة الأولى : المتتاليات		**٢١**
جدول توزيع الحصص		٢١
أهداف الوحدة		٢١
المقدمة		٢٢
١ – ١	المتتاليات	٤١
١ – ٢	المتتالية الحسابية	٤٢
١ – ٣	مجموع n حداً الأولى في متتالية حسابية	٤٣
١ – ٤	المتتالية الهندسية	٤٥
١ – ٥	مجموع n حداً الأولى في متتالية هندسية	٤٧
١ – ٦	اختبار الوحدة	٤٨
الوحدة الثانية : اللوغاريتمات		**٤٩**
جدول توزيع الحصص		٤٩
أهداف الوحدة		٤٩
المقدمة		٥٠

http://e-learning-moe.edu.ye

تابع المحتويات

	الموضوع	الصفحة
٢ – ١	مفهوم اللوغاريتم وأهميته	٥٨
٢ – ٢	قواعد اللوغاريتمات	٦١
٢ – ٣	اللوغاريتمات العشرية (العددية)	٦٣
٢ – ٤	اللوغاريتم الطبيعي	٦٥
٢ – ٥	تطبيقات اللوغاريتمات	٦٦
٢ – ٦	اختبار الوحدة	٦٧
	الوحدة الثالثة : المصفوفات والمحددات	**٧١**
	جدول توزيع الحصص	٧١
	أهداف الوحدة	٧١
	المقدمة	٧٢
٣ – ١	المصفوفات	٨٠
٣ – ٢	العمليات على المصفوفات	٨٣
٣ – ٣	المحددات	٩٢
٣ – ٤	حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى	٩٦
٣ – ٥	اختبار الوحدة	١٠٤
	الوحدة الرابعة : المشتقات	**١٠٧**
	جدول توزيع الحصص	١٠٧
	أهداف الوحدة	١٠٧
	المقدمة	١٠٨
٤ – ١	نهاية واتصال الدالة	١١١
٤ – ٢	المشتقات	١١٢
٤ – ٣	قواعد إيجاد المشتقات	١١٣
٤ – ٤	مسائل تطبيقية	١١٥
٤ – ٥	اختبار الوحدة	١١٧

http://e-learning-moe.edu.ye

مقدمة الدليل

عزيزنا المدرس ..

عزيزنا المدرسة....

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي القسم الأدبي فإننا نرى ضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي وكتاب التمارين .

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة ، وهذه الحصص لن تتم إلاَّ بتخطيط جيد ، وهذا مايسعى هذا الدليل إلى مساعدتك للوصول إليه .

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للمرحله الثانويه ، وفق استراتيجية تربوية شاملة ، وخطة واضحة المعالم . ومن أهم معالمها إنها تعطى أهمية كبيره لأنشطة الطلبة وتعلمهم الذاتي من خلال حل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، إضافة إلى إعطاء أهمية خاصة لآدلة المعلمين ، وفق معايير متجددة حتى يتمكن المدرس من الإستفادة منها استفادة حقيقة في مجال تخطيط الدروس وتنفذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سلمية وسلسة وشيّقة للطلبة في الكتاب المدرسي ، إضافة إلى التمارين والمسائل المتنوعة في كتاب التمارين ، فإننا أشد حرصاً على أن نقدم للمدرسين أفضل الطرائق ، وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعليم ...

ولقد وضعنا في بداية هذا الدليل أهداف تدريس الرياضيات للمرحلة الثانوية عامة ، وللصف الثاني الثانوي(القسم الأدبي) بشيء من التفصيل من واقع وثيقة المنهاج ، ثم اتبعناها بثلاث مقدمات توضيحية حول الكتاب المدرسي وكتاب التمارين والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُنيت عليها وكيفية استخدامها .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا .

والله من وراء القصد ،،،

المؤلفون

http://e-learning-moe.edu.ye

أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية

يهدف تدريس الرياضيات في نهاية المرحلة الثانوية إلى :

١ – تعرُّف المتعلم على الأعداد المركبة ، وإجراء العليات عليها .

٢ – تعرُّف المتعلم على مبادئ المنطق الرياضي .

٣ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات (الدوال) ، وأنوعها .

٤ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات العكسية ، وإيجاد التطبيق العكسي لتطبيق معطى .

٥ – تعرُّف المتعلم على تركيب التطبيقات وإيجاده .

٦ – إجراء المتعلم للعمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .

٧ – تعرُّف المتعلم على اللوغاريتمات وخواصها ، واستخدامها ، وتمييز الدالة الأسية واللوغاريتمية ورسمها .

٨ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستنتاج بعض قوانينها (الحد العام، المجموع) ، واستخدامها .

٩ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصها وحل مسائل عليها .

١٠ – تعرُّف المتعلم على نهاية بعض الدوال ، وحسابها ، وإيجاد مشتقاتها .

١١ – تعرُّف المتعلم على مشتقات بعض الدوال ، وحسابها باستخدام القواعد .

١٢ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية .

١٣ – تعرُّف المتعلم على النظم الرياضية الجبرية ذات العملية الواحدة ، وذات العمليتين .

١٤ – تعرُّف المتعلم على المحددات ، والمصفوفات ، والمتجهات ، وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استخدام المتعلم بعض خواص المصفوفات ، والمحددات ، في حل مجموعات من المعادلات الخطية .

١٦ – استنتاج المتعلم لبعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .

http://e-learning-moe.edu.ye

١٧ – إيجاد المتعلم لميل ومعادلة المستقيم في المستوى ، واستنتاج معادلة المماس .

١٨ – تعرُّف المتعلم على المتجهات وخواصها ، وإجراء العمليات عليها .

١٩ – إكساب المتعلم مفاهيم الدوران ، والتكبير ، والانعكاس تحليلياً وتركيب الدوران والتحاكي .

٢٠ – استنتاج المتعلم بعض معادلات القطوع المخروطية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .

٢١ – تعرُّف المتعلم على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بينها .

٢٢ – برهنة المتعلم لبعض مبرهنات الهندسة الفضائية ، وستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .

٢٣ – حساب المتعلم لمقاييس التشتت ، وبعض معاملات الارتباط .

٢٤ – برهنة المتعلم بعض قوانين ومبرهنات الاحتمالات ، واستخدامها في حل بعض المسائل.

٢٥ – تعرُّف المتعلم على حساب التكامل واستنتاج بعض قوانينه .

٢٦ – إجراء المتعلم لبعض التكاملات ، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .

٢٧ – استخدام المتعلم الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

٢٨ – إكساب المتعلم بعض القيم العملية السليمة مثل الأمانة العلمية والنظام والترتيب والاعتماد على النفس من خلال منهجية علم الرياضيات .

٢٩ – تنمية روح البحث والابتكار لدى المتعلم ومتابعة التطورات العملية المعاصرة.

٣٠ – تنمية الذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال والبنى الرياضية المختلفة .

٣١ – تقدير المتعلم لدور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

http://e-learning-moe.edu.ye

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي)

يكون المتعلم بعد الانتهاء من دراسة الصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي) قادراً على :

١ – استخدام قوانين الأسس ، اللوغاريتمات ، وحل المعادلات عليها .

٢ – التعرف على مفاهيم المتتاليات الحسابية ، والهندسية .

٣ – التعرف على بعض قوانين المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستخدامها (الحد العام ، المجموع) .

٤ – التعرف على المصفوفات والمحددات وإجراء العمليات عليها .

٥ – استخدام المصفوفات والمحددات في حل نظام من المعادلات الخطية .

٦ – التعرف على بعض المشتقات .

٧ – إيجاد مشتقات بعض الدوال .

جدول توزيع الحصص على الوحدات

م	عنوان الوحدة	عدد الحصص
١	المتتاليات	١٧
٢	اللوغاريتمات	١٦
٣	المصفوفات والمحددات	١٨
٤	المشتقات	١٣
	المجموع	٦٤

http://e-learning-moe.edu.ye

الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي

∈ عنصر في / ينتمي إلى
∉ ليس عنصراً في / لا ينتمي إلى
⊂ مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊆)
⊄ ليست مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊈)
{ ا ، ب ، جـ ، ... } حاصرتا المجموعة
∩ تقاطع
∪ اتحاد
∅ ، { } المجموعة الخالية (فاي)
سَ متممة المجموعة س
س / ص = س – س ص الفرق بين المجموعتين س ، ص .
س × ص حاصل ضرب المجموعتين س ، ص .
ط مجموعة الأعداد الطبيعية .
ص مجموعة الأعداد الصحيحة (ومنها ص$^{+}$ ، ص$^{-}$)
د مجموعة الأعداد النسبية (د)
ح مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)
[ا ، ب] الفترة المغلقة ا ، ب .
] ا ، ب [الفترة المفتوحة ا ، ب .
] ا ، ب] الفترة نصف المفتوحة من جهة ا .
[ا ، ب [الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .
π النسبة التقريبية (باي) .
< أكبر من
> أصغر من
≤ أكبر من أو يساوي
≥ أصغر من أو يساوي
e الأساسي الطبيعي (وهو عدد حقيقي غير نسبي)
لط لوغريتم العدد الطبيعي
= يساوي .
≯ ليس أصغر من

http://e-learning-moe.edu.ye

$\not<$	ليس أكبر من .
$\neq$	لا يساوي
$/\!/$	يوازي
$\not/\!/$	لا يوازي
$\perp$	عمودي على
$\not\perp$	ليس عموديا على
$\approx$	يساوي تقريباً
$\equiv$ ، $\simeq$	يكافئ
$\sim$	يشابه
$\cong$	يطابق
$\because$	بما أن
$\therefore$	إذن
$\overline{أب}$	القطعة أ ب
$\|أب\|$	طول القطعة أ ب .
$\overleftarrow{أب}$	الشعاع الذي بدايته النقطة ا .
$\overleftrightarrow{أب}$	المستقيم أ ب (الذي يمر بالنقطتين أ ، ب) .
$\propto$	يتناسب
مجـ	المجموع
Δ	المثلث
$\measuredangle$ أ ب جـ	الزاوية أ ب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .
ق ($\measuredangle$ أ ب جـ)	قياس الزاوية أ ب جـ .
جا	جيب الزاوية
جتا	جيب تمام الزاوية
ظا	ظل الزاوية
ظتا	ظل تمام الزاوية
قا	قاطع الزاوية
قتا	قاطع تمام الزاوية
[س]	أكبر عدد صحيح س
$\pm\infty$	سالب وموجب ما لا نهاية
| |	القيمة المطلقة

http://e-learning-moe.edu.ye

$\forall$	لكل
$\exists$	يوجد على الأقل
$\sim$ ا	نفي ا
$\Rightarrow$	يقتضي
Δ ، δ	دلتا
$ح_{د}$	الحد النوني للمتتالية (الحد العام)
$< ح_{د} >$	متتالية حسابية أو هندسية حدها العام $ح_{د}$
3	أبسِلُون
$\wedge$	(و) رمز العطف
$\vee$	(أو) رمز الفصل
$ت^{-1}$	التطبيق العكسي للتطبيق ت
$ت_1 \circ ت_2$	تركيب تطبيقين $ت_1$ ، $ت_2$
$\sqrt[د]{ا}$	الجذر النوني للعدد ا
حـ	حدودية
$ط^* = ط / \{0\}$	
$صـ^* = صـ / \{0\}$	
$د^* = د / \{0\}$	
$ح^* = ح / \{0\}$	
$\overrightarrow{اب}$ المتجه ا ب	
($\overrightarrow{وا}$ ، $\overrightarrow{وب}$)	الزاوية الموجهة ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{وا}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{وب}$
$\overrightarrow{ف}$ (س ، ص)	المتجه القياسي
$\overrightarrow{0}$	المتجه الصفري
$\lvert \overrightarrow{ف} \rvert$	طول متجه
$\overrightarrow{سـ}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور السيني الموجب
$\overrightarrow{صـ}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور الصادي الموجب
$\overrightarrow{ف_1} \bullet \overrightarrow{ف_2}$	الضرب الداخلي لمتجهين
ك $\bullet \overrightarrow{ف}$	ضرب متجه بعدد حقيقي
نهـا	نهاية
$د'(س)$	مشتقة الدالة د (س)

http://e-learning-moe.edu.ye

منهجية إعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه

عند إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية، رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب استراتيجية مناهج هذه المرحلة التي استندت إلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإلى الأسس العامة للتربية، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرائق والأساليب كما ورد في وثيقة المناهج من ناحية، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى، وكل ذلك مبنيٌ على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية، ولهذا ظهرت هذه المعالم واضحة في كتب الرياضيات لهذه المرحلة، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة مع مراعاة الدقة والصرامةالعلمية، والاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي، إضافة إلى التعزيز بالتدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة .

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات وشبه المحسوسات، واقترب أكثر فأكثر إلى العمليات التجريدية ، إذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى عالٍ ، منها : التصنيف، والمقارنة، وتكوين المفاهيم والعلاقات، والتجريد والتعميم، والتفسير والترجمة . والطالب في هذه المرحلة يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الأستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية مما يساعد على حل المشكلات بشكل أعمق، وبما ينمي لدى الطلبة جوانب الإبداع والابتكار.

٣ – جرت ـ قدر الإمكان ـ محاولة لتوظيف المادة التعليمية ، في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إلا نوع من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم إلى جانب العادات الإيجابية وتنمية الانتماء . والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال تقديم المواضيع بشكل منسق إلى جانب عرض بعض جماليات المادة هنا وهناك.

٤ – مراعاة الفروق الفردية حيث عرضت المادة بتسلسل من خلال قدرٍ كافٍ من الأمثلة ، والتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجياً متصاعداً في

http://e-learning-moe.edu.ye

صعوبة . وتخدم التمارين والمسائل في كل بند تثبيت المادة التعليمية، كما تهدف إلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات والرموز المناسبة ، دون مراعاة دقتها الرياضية دون مبالغة، ومراعاة الربط بالتطبيقات دون خلل في تعميماتها المجردة . وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

أ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية تصنيف وتجريد .

ب) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم.

جـ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ،وهذه عملية تصنيف وتمييز، بل عملية تعميق، ومن ذلك تمت العناية بصياغة تعاريف المفاهيم .

٦ – معالجة البرهنة من خلال الحصول على عدد من المبرهنات وبرهانها وحل بعض التمارين والمسائل عليها، ويتم ضمن ذلك تحديد المعطيات (المقدمات) والمطالب (النتائج) وقد تم الاهتمام في هذا المجال بتطوير أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه . وعُني هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية والتحليلية .وقد ظهرت البرهنة لأول مرة في الصفوف (٧– ٩) من مرحلة التعليم الأساسي وقد سارت فكرة البرهنة في تلك المرحلة على النحو التالي :

أ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات، وقد مُهّد لذلك في الصفوف الدنيا من مرحلة التعليم الأساسي واستمر في الصفوف العليا من تلك المرحلة.

ب) فهم البرهان والخطوات المنطقية (كان يتركز هذا في الصف السابع) .

جـ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا الأمر مشترك في الصفين السابع والثامن .

د) إقامة البرهان بشكل ذاتي، حيث يتمكن الطالب بنفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل، ويبدأ هذا من الصف الثامن. وفي المرحلة الثانوية يتم الإرتقاء بالبرهنة من حيث الأساليب والأفكار ،وفي هذا المجال لا بد من التأكيد على نموذج عرض البرهان، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة.

٧ – إعطاء أهمية للمهارات بشكل مواز لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات،

http://e-learning-moe.edu.ye

بحيث لا يطغى واحد على الآخر. وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

ب) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة (وهي مرحلة سابقة للمهارات) .

جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا تمام المهارة .

تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر إن للمهارة جانبين هما الدقة والسرعة. والعناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلا أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى ، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات. ومن المهارات التي يجب أن يتقنها طالب هذه المرحلة استخدام الآلات الحاسبة واستخدام الجداول والرسوم البيانية وتفسيرها. وما شابه ذلك .

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، وأساليب التفكير الرياضي خاصة. ويعتبر ما سبق تقديمه في مرحلة التعليم الأساسي من شرح وتوظيف لاستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد يمتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة في كل من الجبر والهندسة ، بل وفي كافة الفروع والمجالات الرياضية. ويتمثل حل المسألة في الخطوات التالية :

أ) حصر المعطيات .

ب) تحديد المطلوب .

جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل، ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات اللازمة للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد ، وفي هذه الخطوة يتم تنمية الابداع والابتكار .

د) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل

http://e-learning-moe.edu.ye

منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

هـ) مراجعة الحل (التحقق من صحة الحل) : وهو مطلب تربوي، أكثر من كونه علمياً ، إذ يساعد على تنمية القدرة على النقد الذاتي، حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أولاً : أُعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلا أن المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم . إن المنهاج ينعكس انعكاساً تاماً في الكتاب ، وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ دروسه اليومية. وهذا لا يعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي وكذلك كتاب التمارين . كما يوصي المدرس بالمراجع العلمية والتربوية الأخرى ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية ، وقد أوردنا عدداً منها في الدليل في نهاية كل وحدة.

ثانياً : يعتبر الكتاب المصدر الرئيس للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفاً ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المادة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعليمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة خارج الصف، إذا كان وقت الحصص لايستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العملية . ومما سبق نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين تقدم للطالب مفهوم خاطئ، وللاسف لازال يمارسه كثير من المدرسين دون ادراك .

ثالثاً : يقدّم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما

http://e-learning-moe.edu.ye

هي ثم يطلب نقلها إلى الكرسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو من كتاب التمارين أو يعدها بنفسه .

رابعاً : يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بحيث يمكن أن تغطى المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد ضمن ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية .

هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجيةً واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة ، كما ذكرنا في أولاً .

منهجية إعداد كتاب التمارين وكيفية استخدامه

من ضمن استراتيجات إعداد المواد التعليمية للمرحلة الثانوية، يأتي إعداد كتب الأنشطة والتمارين لكل مادة ولهذا فقد جاء إعداد كتاب التمارين لمادة الرياضيات تلبية لهذه الاستراتيجية وتحقيقاً لأهداف تعليمية مكملة للكتب المدرسية . وقد روعي عند إعداد كتاب التمارين أن يحتوى على ما يلي :

١ – إضافة إلى تمارين ومسائل كل بند في الكتاب المدرسي فقد تم إعداد بعض التمارين والمسائل التي وضعت تحت رقم البند المعني ، وإن كانت تمارين الكتاب المدرسي تغنى عن هذه التمارين، إلا أن ما ورد في كتاب التمارين هو نوع من زيادة التمرن، واحتياطي لمن يريد الاستزادة من التمارين بغرض التمكن من المادة .

٢ – وضعت في نهاية كل وحدة مجموعة من التمارين العامة والمسائل التي تربط محتوى الوحدة ككل، وتساعد على تفهم العلاقة بين بنودها المختلفة، وبما يساعد على التعمق في محتوى كل وحدة ويجعلها أكثر ثباتاً في أذهان الطلبة .

٣ – اختبار الوحدة، وهو متناغم مع اختبار الوحدة الذي في الدليل ، حيث إن اختبار الدليل قد وضع وفقاً لأهداف الوحدة .

واستناداً لما سبق ، فقد خطط أن يستخدم كتاب التمارين على النحو التالي :

أولاً : يمكن الاكتفاء بتمارين ومسائل الكتاب المدرسي بعد كل بند ، ويستعان بما في كتاب التمارين فقط وقت الضرورة ، أو لإعداد بعض الاختبارات أو خطوات التقويم نهاية كل بند .

http://e-learning-moe.edu.ye

نهاية كل وحدة يكلّف الطلبة بحل عدد كاف من التمارين العامة والمسائل، يقوم المدرس باختيارها بدقة، وممكن مراجعتها أو مناقشتها في وقت الحصص ، أوحسبما يراه المدرس مناسباً .

ثالثاً : يطلب المدرس من الطلبة حل اختبار الوحدة كواجب منزلي ، وقبل يومين أو ثلاث من الاختبار الذي سيتم إجراؤه . وبالتالي يتيح فرصة كافية للطلبة للمراجعة والاستفسار عن أي صعوبات تواجههم . ومن خلال هذا نرى أن الهدف الأساسي لكتاب التمارين هو تمكين الطلبة من المادة وتثبيتها وتعميقها لديهم .

منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للمرحلة الثانوية منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع استراتيجية مناهج هذه المرحلة؛ ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية، وتراعي خصوصية المواضيع ولا تلغي إبداع المدرس في سلوكه التدريسي، الذي يمكنه من إبراز شخصيته مع أخذه بعين الإعتبار خصوصيات طلبته . ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية والتي يجب الأخذ بها عند استخدام تلك الأدلة :

١ – الحرص على أن تخطط جميع الوحدات ، بل وجميع الدروس ، إلا أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا وضع تشكيل كل وحدة على النحو التالي :

أ) جدول بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب ، وعلى المدرس ألا يزيد كثيراً أو ينفقص كثيراً عن هذا العدد المقترح من الحصص .

ب) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها . وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما أنها منسجمة ـ إن لم تكن متطابقة ـ مع وثيقة المناهج لكل وحدة .

http://e-learning-moe.edu.ye

جـ) مقدمة للوحدة وتحتوي على فكرة عامة لمكونات الوحدة الدراسية،وعلى لمحة تاريخية ، ومفاهيم وتعميمات الوحدة، وبعض الأخطاء الشائعة إذا دعت الضرورة لذكرها وسبل علاجها ، وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولا يجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

د) أهداف لكل درس، مع ذكر العدد المقترح للحصص ، كما تم التعرض لتنفيذ الدرس بتحديد عنوان عام لكل حصة دراسية، ثم جاء تقويم الدرس ، وبعد ذلك إرشادات وإجابات التمارين والمسائل .

هـ) كما سبق الإشارة ، يعطى اختبار الوحدة الذي في كتاب التمارين كواجب منزلي، وتهيئة لاختبار الوحدة الحقيقي . ثم يعطي المدرس اختبار الوحدة المعد في الدليل، ويمكنه أن يعد اختباراً آخراً وفق ذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة ، ومن خلال تحليل إجابات الطلبة يمكن أن تتم معالجة الأخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ – كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلا مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ، ولهذا على المدرس أن يكيف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف ، وبما يتيح له الإبداع دون الخروج عن أهداف المنهاج . ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءة متمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة بأهدافها وخطواتها التمهدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من عنده، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه مستعيناً بالتقويم الذي في الدليل لكل بند .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ، وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها، وأن يوظفه بشكل يومي، ولا

http://e-learning-moe.edu.ye

يقتصر استخدامه ـ كما تعود كثير من المدرسين ـ على تحديد الواجبات والتمارين.

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطيه المدرس عناية كبيرة ، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب ، منها تسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً ، واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة وبحيث يشعر الطلبة المتوسطون بشئ من تحقيق الذات. وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلته وتمارينه، وإلا فإننا نوجه نظره إلى كتاب التمارين. كما يجب على المدرس أن يضع ذلك من ضمن أهداف الدرس ، مثلاً إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين .

٦ – كل ما يشار إليه من أساليب لتنمية القدرات العقلية ، وعلى المدرس تنفيذها بشكل أو آخر ، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف ، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة ، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة .

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعينة، إلا في البرهنة ، ولهذا على المعلم ، وكلما أتيحت الفرصة ، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في مرحلة التعليم الأساسي من استراتيجية حل المسألة ، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها .

٨ – ينصح المدرس بأن يوجه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية من حيث العرض الكتابي، يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظاميته وجمال عرضه .

وبعد عرض المنهجيات الثلاث لإعداد الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ودليل المعلم ، فإن على المدرس تتبع هذه المنهجيات في عمله التدريس حصة حصة وبنداً بنداً ، ويحرص على تطبيقها في الممارسة الفعلية للتدريس .

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الأولى المتتاليات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
١ – ١	المتتاليات .	٤
١ – ٢	المتتالية الحسابية (العددية) .	٣
١ – ٣	مجموع ن حداً الأولى لمتتالية حسابية	٣
١ – ٤	المتتالية الهندسية .	٢
١ – ٥	مجموع ن حداً الأولى لمتتالية هندسية .	٣
١ – ٦	اختبار الوحدة .	٢
	المجموع	١٧

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرف المتتالية .

٢ – يوجد حدود المتتالية .

٣ – يعرف المتتالية الحسابية .

٤ – يوجد الحد العام للمتتالية الحسابية .

٥ – يوجد الأوساط الحسابية .

٦ – يوجد مجموع ن حداً الأولى من متتالية حسابية .

٧ – يعرف المتتالية الهندسية .

٨ – يوجد الحد العام للمتتالية الهندسية .

٩ – يستنتج مجموع ن حداً من متتالية هندسية .

١٠ – يوجد مجموع ن حداً من متتالية هندسية .

http://e-learning-moe.edu.ye

المقدمـــــة

لمحــة تاريخيـــة

الرياضيات من العلوم التي نالت الشيء الكثير من اهتمام العرب والمسلمين وعنايتهم فلقد برعوا فيها ، وأضافوا إليها إضافات هامة أثارت إعجاب علماء الغرب ودهشتهم فاعترفوا بفضل العرب وأثرهم الكبير في خدمة العلم والمعرفة .

ولقد إطّلع العرب على علم الهنود واليونان والإغريق وترجموه إلى العربية وطوّروه . ومن أهم التطورات التي حدثت في علم الحساب وخاصة في موضوع المتتاليات نجد أن هناك نصوصا عربية تحوي العديد من أنواع المتتاليات مرفقه بالقواعد الهامة المتعلقة بدراسة المتتاليات وكيفية إيجاد حد المتتالية مهما كانت منزلته أو التي تعطي مجموع حدودها إلى أي رتبة . ولقد وجد العرب أن الهنود والإغريق قد عالجوا متتاليات حسابية متنوعة إلا أن العرب فهموا خصائص العلم الإغريقي بصورة أسرع وأعطوه الأفضلية على ما تبقى من أنظمة ويعود ذلك إلى تميّزه بالبراهين المنطقية خلافاً للأنظمة الأخرى التي كانت تكتفي بإعطاء القواعد العملية التي ينبغي اتباعها . وعلاوة على ذلك كان للعرب أسلوب خاص في إجراء العمليات وكانوا يوردون طرقاً عديدة لإجراء الحسابات . والجدير بالذكر أن هناك مؤلفات عديدة تناولت دور علماء الرياضيات السابقين في موضوع المتتاليات بأنواعها فمثلاً هناك متتاليات حسابية (عددية) معينة مثل متتالية المضاعف (٢ د) ، د ∈ ط نجدها في عدد كبير من المؤلفات . ونجد أن الاغريق درسوا المتتالية الحسابية العامة التي على الصورة :

١ ، ١ + ء ، ١ + ٢ ء ، ... ، ١ + (د − ١) ء ، ... ——— (١)

حيث ١ + (د − ١) ء هو الحد العام للمتتالية ومجموع الحدود هو :

$$د + \frac{١}{٢} د (د - ١) ء .$$

وعندما تأخذ ء القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على التوالي نجد أن :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ... هي متتالية الأعداد الصحيحة الموجبة .

١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، .... هي متتالية الأعداد الفردية .

كذلك نحصل على متتاليات مثل :

١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ...

١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...

http://e-learning-moe.edu.ye

فإذا جمعنا حدود المتتالية (١) .

(الأول ، ثم الأول و الثاني ، فالأول والثاني والثالث ، . . . . .) نحصل تدريجياً على .

(١ ، ٢ + ء ، ٣ + ٣ ء ، ٤ + ٦ ء ، . . .) ـــــــ (٢) .

وهي متتالية جديدة ومن السهل أن نرى أن حدّها ذا الرتبة د هو مجموع حدود المتتالية (١) حتى الرتبة د أي :

$$د + \frac{١}{٢} د (د - ١) ء \quad .$$

وقد أعطى الإغريق لحدود المتتالية (٢) اسم الأعداد المضلّعة وعندما تأخذ ء في المتتالية (٢) القيم

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نحصل على :

١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، . . . . . ـــــــ (٣)

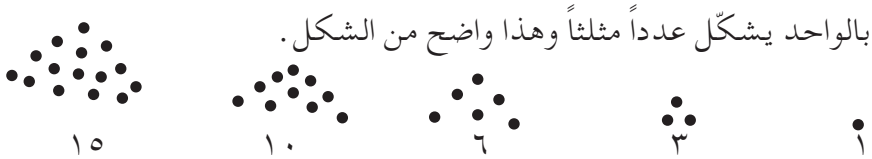
١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، . . . . . ـــــــ (٤)

١ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٢ ، . . . . . ـــــــ (٥)

١ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٨ ، . . . . . ـــــــ (٦)

وهذه الفكرة يونانية الأصل ، تعود إلى زمن فيثاغورث وهي كمجمل المفاهيم الرياضية اليونانية ذت أصل هندسي حيث (٣) قد انشئت من بنيه كالتالي :

مجموع أي عدد من الحدود المتتالية من متتالية الأعداد الطبيعية ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ابتدأ بالواحد يشكّل عدداً مثلثاً وهذا واضح من الشكل .



لهذا فإن : ١ + ٢ + ٣ + . . . + د = $\frac{١}{٢}$ د (د + ١) هو عدد مثلثي بضلع د .

واستطاع الفيثاغوريون إيجاد المثلث التالي من المثلث السابق بإضافة ضلع المثلث السابق زائداً واحداً كما أن مجموع عناصر أي مثلثين متتاليين مربّع كامل . وهذا ما نعبّر عنه بالرموز الحديثة كما يأتي :

http://e-learning-moe.edu.ye

$\Delta_{د} = \sum_{ك=1}^{د} ك = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + \ldots = \frac{١}{٢} د (د + ١)$ (للمثلث الذي ضلعه د).

$\Delta_{د+١} = \sum_{ك=1}^{د+١} ك = \frac{١}{٢} (د + ١) (د + ٢)$ (للمثلث الذي يليه وضلعه د + ١).

$\Delta_{د} + \Delta_{د+١} = \frac{١}{٢} (د + ١) (د + د + ٢) = (د + ١)^{٢}$

وأما إذا اضيفت الاعداد الفردية المتتالية فإنها تكون مربعاً كاملاً :

$١ + ٣ + ٥ + ٧ + \ldots + (٢ د - ١) = د^{٢}$

وهذا ما أكتشفه الفيثاغوريون أيضاً من خواص الأعداد المربّعة ، أن تكون الاعداد المثلثية : ١ ، ١ + ٢ ، ١ + ٢ + ٣ ، ١ + ٢ + ٣ + ٤ ، ...

والاعداد المربعة : ١ ، ١ + ٣ ، ١ + ٣ + ٥ ، ...

بجمع أعداد متتالية حسابية هي كما قلنا من أصل هندسي .

وقد صنَّف الإغريق جميع المتتاليات إلى ما يأتي :

(١) المتتالية الحسابية فيها الفرق بين حد والحد التالي مباشرة ثابت .

(٢) المتتالية الطبيعية فيها الفرق بين حد والحد التالي مباشرة يساوي ١ .

(٣) المتتالية الهندسية فيها نسبة حد إلى الحد السابق مباشرة ثابتة.

(٤) المتتالية المضاعفة فيها نسبة حد إلى الحد السابق مباشرة تساوي ٢ .

(٥) المتتالية الصورية مثل متتالية الأعداد المضاعفة.

أما بالنسبة للعرب والمسلمين فقد انطلقوا بعلم الحساب والجبر انطلاقاً واسعاً وعالجوا كثير من المتتاليات التي تناولها الإغريق .ومن هؤلاء العلماء الكرخي (٠٠٠ - ٤٢١هـ)، الذي اهتم اهتماماً بالغاً بعلم الحساب والجبر فكان نتاجه عظيماً حيث بقيت أوروبا تنهل منه حقبة طويلة من الزمن ولم يترك موضوعاً في الجبر إلا طوَّره .

ويقول الاستاذ روس بول في ملخص تاريخ الرياضيات : إن الكرخي طوّر قانون

http://e-learning-moe.edu.ye

مجموع مربعات الأعداد الطبيعية إلى درجة لم يسبق إليها أحد . وقد ألّف الكرخي العديد من الكتب والرسائل منها :

رسالة في برهان النظريات التي تتعلّق بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد الطبيعية :

$$١ + ٢ + ٣ + ٤ + \ldots + د = \frac{د (د + ١)}{١}$$

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + \ldots + د^{٢} = \frac{د (د + ١) (٢ د + ١)}{٦}$$

$$١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ٤^{٣} + \ldots + د^{٣} = \frac{د^{٢} (د + ١)^{٢}}{٤}$$

كما درس المسائل الآتية :

(١) مضـــروب عدد طبيعي في نفسه، وفي جميع ما تحته من الأعداد يســاوي نصـف حاصل ضرب العدد زائداً واحد في مربع العدد ويمكن التعبير عمّا سبق بالرموز على الوجه التالي :

$$د [د + (د - ١) + (د - ٢) + \ldots + ٣ + ٢ + ١] = \frac{(د + ١) د^{٢}}{٢}$$

ويتضح من الطرف الأيمن للمعادلة أن المطلوب إيجاد حاصل ضرب العدد د في مجموع الأعداد بتسلسلها الطبيعي حتى العدد د .

فمثلاً د = ٩ ، ٩ [٩ + ٨ + ٧ + ٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١] = $\frac{(٩ + ١) ٩^{٢}}{٢}$ = ٤٠٥

(٢) إذا أردت جمع الأعداد الفردية على النظم الطبيعي فزد الواحد على العدد الفردي الأخير وربع نصفها أي أن :

١ + ٣ + ٥ + ٧ + \ldots + (د - ٢) + د = $\frac{(د + ١)^{٢}}{٤}$ حيث د عدد فردي صحيح فمثلاً د = ٩ ، ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥

وحسب القاعدة : $\frac{(٩ + ١)^{٢}}{٤} = \frac{(١٠)^{٢}}{٤}$ = ٢٥

(٣) جمع الأعداد الزوجية : نضرب نصف العدد الزوجي الأخير في ما يليه بواحد أي

http://e-learning-moe.edu.ye

أن: ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + (د – ٢) + د = $\frac{د}{٢}$ ($\frac{د}{٢}$ + ١) حيث

د عدد زوجي صحيح

فمثلاً د = ١٠ ، ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٠ ،

وحسب القاعدة: $\frac{١٠}{٢}$ ($\frac{١٠}{٢}$ + ١) = ٥ × ٦ = ٣٠

كما نجد أن الكرخي في كتابيه «الكافي في الحساب والفخري» قد أعطى صياغة لقانون الحد الأخير لمتتالية عددية (حسابية) عندما يكون أساسها الواحد فقد استنتج أن: ل = ا + (د – ١) د حيث ل الحد الأخير ، ا الحد الأول.

وكذلك قانون المجموع جـ = $\frac{د}{٢}$ (ا + ل) .

كذلك نجد أن العالم الرياضي الطبيب المسلم السموأل المغربي الذي لا يُعرف بالضبط تاريخ ولادته غير أن وفاته كانت سنة ١١٧٥ م قد ألف عدة كتب في الجبر ومن أهم أعماله برهان قوانين متتاليات عددية وغيرها .

أ) مجموع حدود متتالية عددية: $\frac{د}{٢}$ (ا + ل) .

ب) مجموع مربعات الأعداد الطبيعية التي عددها د = ($\frac{د}{٣}$ + $\frac{١}{٦}$) (د^{٢} + د)

= $\frac{د(د+١)(١+٢د)}{٦}$

جـ) (د – ١) $\overset{د}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك^{٢} = (د – ١) $\overset{د-٣}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك + ٣ (د – ١)^{٢}

د) $\overset{د}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك^{٢} = $\overset{د}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك + $\overset{د}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك (ك – ١)

هـ) $\overset{د}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك + ٣ $\overset{د}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ك^{٢} = د (د + ١)^{٢}

وهناك كثير من هذه المتطابقات وأمثالها وردت في كتبه مع برهانها.

أما أبن حمزة المغربي فهو من علماء القرن العاشر الهجري الذين عملوا في الرياضيات ووصفوا المؤلفات التي أفضت إلى تقدم نظرية الأعداد وفي كتابة «تحفة الأعداد لذوي

http://e-learning-moe.edu.ye

الرشد والسداد» قدم ابحاثًا في المتتاليات العددية والهندسية . يقول ابن حمزة «إن أس أساس أي حد من حدود متتالية هندسية تبدأ بالواحد الصحيح يساوي مجموع اسس اساس الحدين اللذين حاصل ضربهما يساوي الحد المذكور ناقصاً واحداً» ولإيضاح ذلك نأخذ المتتالية الهندسية الآتية : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...

والمتتالية العددية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...

فاعتبر ابن حمزة أن حدود المتتالية الثانية هي أسس للأساس من حدود المتتالية الأولى . وهذا صحيح إذا زحفنا في حدود المتتالية العددية خطوة واحدة إلى اليسار ، أي إذا ابتدأنا بالصفر. إن أساس المتتالية الهندسية هو (٢) فإذا أخذنا ١٦ نجد أن العدد الذي يقابلها من المتتالية العددية هو (٥) فإذا أخذنا عددين حاصل ضربهما (١٦) مثل ٢ ، ٨ فالعددان اللذان يقابلاهما في المتتالية العددية هما ٢ ، ٤ على التوالي، إن العدد (٥) الذي يقابل ١٦ يساوي ٢ + ٤ – ١ .

خلفية علمية

أولاً : المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المتتالية : $\langle ح_د \rangle$ ، $\langle ص_د \rangle$ ، . . .
- المتتالية المنتهية : $\langle ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، . . ، ح_د \rangle$
- المتتالية غير المنتهية : $\langle ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، . . ، ح_د ، . . . \rangle$
- الحد العام للمتتالية / الحد النوني $ح_د$
- المتتالية الثابتة $\langle ا \rangle$ ، ا عدد ثابت
- بيان المتتالية
- المتتالية المتزايدة (التزايدية)
- المتتالية المتناقصة (التناقصية)
- المتتالية الحسابية (العددية)
- أساس المتتالية الحسابية (د)
- الأوساط الحسابية

http://e-learning-moe.edu.ye

– مجموع د حداً الأولى من متتالية حسابية مجـــ د = مجـــ د / ك = ١

– المتتالية الهندسية

– أساس المتتالية الهندسية (م)

– الأوساط الهندسية

– مجموع د حداً الأولى في متتالية هندسية مجـــ د = مجـــ د / ك = ١

ثانياً : حقائق وتعميمات :

١– المتتالية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ط* ، أو مجموعة جزئية منها على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م } ، ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، وعناصر المتتالية تسمَّى حدود المتتالية .

٢– المتتالية تسمَّى أيضاً متوالية ، كما تسمى أحياناً متتابعة .

٣– طرق كتابة المتتالية :

أ) بحدها العام ويرمز له بالرمز ح د ، ويعبر عن ح د بقاعدة المتتالية .

فنقول مثلاً المتتالية ح د = ٢ د + ٣

ب) على شكل أزواج مرتبة :

وكل زوج = (رتبة الحد ، قيمة الحد) مبتدئين بالحد الأول ، فلكتابة المتتالية التي قاعدتها ٢ د + ٣

نضع : د = ١

∴ ح١ = ٢ × ١ + ٣ = ٥ فنحصل على الزوج (١ ، ٥)

ثم د = ٢

∴ ح٢ = ٢ × ٢ + ٣ = ٧ فنحصل على الزوج (٢ ، ٧)

ثم نضع د = ٣ ثم ٤ ، ... وهكذا .

فتكون المتتالية هي : (١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، ... إلخ .

جـ) ببضعة حدود من المتتالية :

وذلك بكتابة قيم الحدود الأولى للمتتالية . فالمتتالية التي حدّها النوني (العام) = ٢ د + ٣ تكتب على الصورة : ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ...

http://e-learning-moe.edu.ye

وذلك بكتابة ح١ ، ح٢ ، ح٣ ، ح٤ ، ح٥ ، ... ، وقد رمزنا للمتتالية بالرمز < ح ن > حيث ح ن حدها العام (النوني) .

٤ – تمثل المتتالية بيانياً بنقاط في المستوى الديكارتي (مستوى الاحداثيات) وهي تختلف عن التمثيل البياني للدالة في المجال حيث يشترط في المتتالية أن يكون المجال ط* أو مجموعة جزئية منها على الصورة : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...، م } وحيث أن المتغير ن في أي متتالية من النوع الوثاب لأن نطاقه (مجاله) يأخذ القيم المتقطعة ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... لذلك فإن المتتالية لا تمثل بخط منحنٍ متصل وأنما بمجموعة من النقاط المنفصلة .

٥– ليس بالضرورة أن يتعين قانون للحد العام لكل متتالية فهناك من المتتاليات ما يتعذر أو يستحيل تعيين قانون حدها العام مثل متتالية الأعداد الأولية :

٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ...

٦– إذا كانت ج ن تزداد بازدياد قيمة ن سُميّت المتتالية متتالية متزايدة (تزايدية) ، وإذا كانت ح ن تنقص بازدياد قيمة ن سميت متتالية متناقصة (تناقصية) .

٧– يقال للمتتالية <ح ن > أنها متذبذبة إذا وفقط إذا كان : ح ن+١ • ح ن < صفر لجميع قيم ن ∈ ط*

مثال : المتتالية <(–٢)ن> نجد أن : ح١ = –٢ ، ح٢ = ٤ ، ح٣ = –٨ ، ح٤ = ١٦ ، ...

نلاحظ أن حدود المتتالية تتأرجح على التوالي بين أعداد سالبة وأعداد موجبة ، أي أن حاصل ضرب أي حدين متتاليين يكون سالباً دائماً كما يلي :

$$ح_{ن} \cdot ح_{ن+١} = (-٢)^{ن} \times (-٢)^{ن+١} = (-٢)^{ن+ن+١}$$

$$= (-٢)^{٢ن+١} = (-٢)^{٢ن} \times (-٢)$$

$$= ٤^{ن} \times -٢ = \text{عدد سالب}$$

والمتتالية المتذبذبة حالة خاصة من المتتالية التي ليست تزايدية ولا تناقصية .

٨ – يقال للمتتالية <ح ن > أنها متتالية متناوبة إذا كانت المتتالية تزداد فيها قيمة الحدود وتنقص على التوالي، دون أن تتغير إشارة الحدود، وتكون هذه المتتالية ليست تزايدية ولا تناقصية .

http://e-learning-moe.edu.ye

مثال : المتتالية $\langle ر + (-١)^{ر} \rangle$

هذه المتتالية هي : $\langle ٠ ، ٣ ، ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٧ ، ... \rangle$ وهي متتالية متناوبة.

أمثلة أخرى :

أ) $\langle ٣^{ر-١} \rangle$ متتالية تزايدية .

ب) $\langle \frac{٣ر + ٢}{ر} \rangle$ متتالية تناقصية .

جـ) $\langle \frac{(-١)^{ر}}{ر + ١} \rangle$ متتالية متذبذبة .

٩- المتتالية التي مجالها ط تسمَّى متتالية غير منتهية أما المتتالية التي مجالها مجموعة جزئية من ط* على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، د } تسمَّى متتالية منتهية.

١٠- المتتالية $\langle ح_{ر} \rangle$ أنها محدودة من أسفل $\Leftrightarrow$ يوجد عدد م ، بحيث $ح_{ر} \geq م$ لجميع قيم $د \in ط^{*}$ ويكون م حداً سفلياً للمتتالية.

- مثال: $\langle \frac{١}{ر} \rangle$ هي $\langle ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، ... \rangle$.

نلاحظ المتتالية تناقصية وقيم الحدود تقترب من الصفر ولكنها لا تساوي الصفر أبداً، وجميع الحدود موجبة.

إذن جميع الحدود أكبر من الصفر ، إذن فهي محدودة من أسفل بالعدد «صفر» $\langle ح_{ر} \rangle$ صفر $\forall د \in ط^{*}$) .

١١- المتتالية $\langle ح_{ر} \rangle$ محدودة من أعلى $\Leftrightarrow$ يوجد عدد ك ، بحيث أن $ح_{ر} \leq ك$ لجميع قيم $د \in ط^{*}$ ويكون حداً علوياً للمتتالية :

مثال : $\langle \frac{٣}{ر^{٢}} \rangle$ هي $\langle ٣ ، \frac{٣}{٤} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٣}{١٦} ، ... \rangle$

نلاحظ أن المتتالية تناقصية وواضح أن أكبر الحدود هو الحد الأول وقيمته ٣ إذن جميع الحدودأصغر من ٣ .

إذن فهي محدودة من أعلى بالعدد ٣ ($ح_{ر} \leq ٣$ ، $د \in ط^{*}$) .

http://e-learning-moe.edu.ye

– المتتالية $\langle ح_ن \rangle$ محدودة $\Leftrightarrow$ محدودة من أسفل وأيضاً محدودة من أعلى.

أي يوجد عددان م ، ك بحيث م $\leq ح_ن \leq$ ك $\quad \forall$ ن $\in$ ط* .

مثال : $\langle$ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ $\rangle$.

١٢– المتتاليات الحسابية : (العددية) .

المتتاليـــة الحسابيـــة هـــي عدة كميات متتالية تبدأ بكمية معينة تسمَّى الحد الأول $ح_١$ وتزيـــد أو تنقص بمقدار ثابت يسمى الأساس (د) حيث د = أي حد ناقص الحد السابق له مباشرة .

أ) الصورة العامة للمتتالية الحسابية. $\langle ح_١ ، ح_٢ = ح_١ + د ، ح_١ + ٢ د ، ح_١ + ٣ د ، ... ، ح_ن - د ، ... \rangle$

ب) الحد العام في المتتالية الحسابية $\langle ح_ن \rangle$ يُعطى بالعلاقة :

$$ح_ن = ح_١ + (ن + ١) د$$

حيث ن رتبة الحد.

جـ) ا ، ب ، جـ تكون متتالية حسابية $\Leftrightarrow$ ب هو الوسط الحسابي للعددين ا ، جـ

أي أن : $ب = \frac{ا + جـ}{٢}$.

د) مجموع ن حداً من متتالية حسابية حدها الأول $ح_١$ وحدها الأخير $ح_ن$ يرمز له بالرمز $مجـ_ن$ حيث $مجـ_ن = \frac{ن}{٢} (ح_١ + ح_ن)$.

وإذا كانت المتتالية الحسابية حدها الأول $ح_١$ وأساسها د فإن مجموع ن حداً الأولى منها هو : $مجـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢ ح_١ + (ن – ١) د)$.

هـ) خواص المتتالية الحسابية :

– في المتتالية الحسابية يكون مجموع الحدين الواقعين على بعدين متساويين من الطرفين ثابتاً ويساوي مجموع الحدين الأول والأخير أي أن : إذا كانت لدينا المتتالية الحسابية :

$\langle ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_{ن-٢} ، ح_{ن-١} ، ح_ن \rangle$

http://e-learning-moe.edu.ye

فإن $ح_{٢} + ح_{ن-١} = ح_{١} + ح_{ن}$ حيث إن :

$ح_{٢} = ح_{١} + د$

$ح_{ن-١} = ح_{ن} - د$ وبالجمع

$ح_{٢} + ح_{ن-١} = ح_{١} + ح_{ن}$

– كل حد في المتتالية الحسابية وسط حسابي للحدين اللذين يحصرانه،أي أن في المتتالية $< ح_{١} ، ح_{٢} ، ح_{٣} ، ح_{٤} ، . . . ، ح_{ن} >$ ، $ح_{٢} = \frac{ح_{١} + ح_{٣}}{٢}$ ،

$ح_{٣} = \frac{ح_{٢} + ح_{٤}}{٢}$ ، . . .

و $ح_{ن} = \frac{ح_{ن-١} + ح_{ن+١}}{٢}$ وتسمَّى الحدود بين $ح_{١}$ ، $ح_{ن}$ أوساط حسابية

وعددها = عدد الحدود – ٢

– إذا كان لدينا المتتالية الحسابية :

$< ح_{١} ، ح_{١} + د ، ح_{١} + ٢ د ، ح_{٣} + ٣ د ، . . . >$ فإن :

$< ح_{١} \pm ك ، ح_{١} \pm ك + د ، ح_{١} \pm ك + ٢ د ، . . . >$

هي أيضاً متتالية حسابية لها نفس أساس المتتالية الأصلية. كذلك

$< ك ح_{١} ، ك (ح_{١} + د) ، ك (ح_{١} + ٢ د) ، . . . >$ ،

$< \frac{ح_{١}}{ك} ، \frac{ح_{١} + د}{ك} ، \frac{ح_{١} + ٢د}{ك} ، . . . >$ ، د ك ≠ ٠

متتاليتان حسابيتان أيضاً أساسهما د ك ، $\frac{د}{ك}$ على التوالي.

١٣ – المتتالية الهندسية :

أ) هي عدة كميات متتالية تبدأ بكمية معينة تسمَّى الحد الأول $ح_{١}$ والنسبة بين أي حد والسابق له مباشرة تسمّى الأساس (ر) حيث

ر (الأساس) = $\frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}} = \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ ، $ح_{ن} ≠ ٠$

http://e-learning-moe.edu.ye

والصورة العامة للمتتالية الهندسية هي :

$$\langle ح_1 ، ح_1 ر ، ح_1 ر^2 ، ح_1 ر^3 ، \ldots ، \frac{ح_د}{ر^2} ، \frac{ح_د}{ر} ، ح_د \rangle$$

والمتتالية الهندسية ليست فيها حد يساوي الصفر.

ب) الحد العام في المتتالية الهندسية : $\langle ح_د \rangle$ ، هو $ح_د = ح_1 ر^{د-1}$ ، $ح_1 \neq 0$ ، $ر \neq 0$ ، (حيث د رتبة الحد) .

جـ) مجموع متتالية هندسية حدّها الأول $ح_1$ وحدّها الأخير $ح_د$ يعطى بالقانون :

$$مجـ_د = \frac{ح_1 ر - ح_1}{ر - 1} \quad \text{إذا كانت } |ر| > 1 \text{ ،}$$

أو $مجـ_د = \frac{ح_1 - ح_1 ر^د}{1 - ر}$ إذا كانت $|ر| < 1$ ، ومجموع متتالية هندسية حدّها الأول $ح_1$ وأساسها ر يُعطى بالقانون :

$$مجـ_د = \frac{ح_1 (ر^د - 1)}{ر - 1} \text{ ، } |ر| > 1 \text{ ، أو } مجـ_د = \frac{ح_1 (1 - ر^د)}{1 - ر} \text{ ، } |ر| < 1 .$$

د)خواص المتتاليات الهندسية :

– في المتتالية الهندسية نجد أن كلَّ حدٍّ هو وسط هندسي بين مجاوريه فإذا كانت $\langle ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، \ldots \rangle$ متتالية هندسية نلاحظ استناداً للتعريف أن

$$\frac{ح_2}{ح_1} = \frac{ح_3}{ح_2} = ر \text{ ، } \ldots \text{ وهكذا .}$$

$$(ح_2)^2 = ح_2 \times ح_3 \quad \therefore ح_2 = \sqrt{ح_1 ح_3}$$

وتسمَّى الأعداد المرتبة $ح_2 ، ح_3 ، ح_4 ، \ldots ح_{د-1}$ أوساطا هندسية .

– أن حاصل ضرب أي حدين متساويي البعد عن الطرفين ثابت ويعادل حاصل ضرب الحد الأول في الحد الأخير .

لتكن $\langle ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، \ldots ، ح_{د-2} ، ح_{د-1} ، ح_د \rangle$ متتالية هندسية .

http://e-learning-moe.edu.ye

استنادًا لهذه الخاصية نجد أن : $ح_{٢} \times ح_{د-١} = ح_{١} \times ح_{د}$

حيث $ح_{٢} = ح_{١} ر$ ..... (١) ،

حيث $ح_{د} = ح_{د-١} ر$ ..... (٢)

بقسمة (١) على (٢) نحصل على $\frac{ح_{٢}}{ح_{د}} = \frac{ح_{١}}{ح_{د-١}}$

$\Leftarrow ح_{٢} \times ح_{د-١} = ح_{١} \times ح_{د}$

– لتكن $< ح_{١} ، ح_{٢} ، ح_{٣} ، ... ، ح_{د} ، ... >$ متتالية هندسية أساسها ر ،

فإن $< ك ح_{١} ، ك ح_{٢} ، ... ، ك ح_{د} ... >$ أي $< ك ح_{١} ، ك ح_{١} ر^{٢} ، ... ،$

$ك ح_{١} ر^{د-١} ، ... >$

أيضاً متتالية هندسية أساسها ر (حيث ك ≠ ٠) ، وكذلك

$< \frac{ح_{١}}{ك} ، \frac{ح_{١} ر}{ك} ، \frac{ح_{١} ر^{٢}}{ك} ، ... >$ متتالية هندسية أساسها ر ، ك ≠ ٠

١٤ – المتسلسلة :

أ) درست سابقاً أن المتتالية هي أعداد مرتبة بترتيب معين وفق قاعدة صريحة ، أو ضمنية وقد أسمينا هذه الأعداد حدود المتتالية ويفصل بين كل حدين متتالين الفاصلة« ، » وإذا ما وضعنا إشارة الجمع مكان الفواصل بين حدود المتتالية فإننا نحصل على ما يسمَّى بالمتسلسلة وتكون المتسلسلة غير منتهية إذا نتجت من متتالية غير منتهية وتكون متسلسلة منتهية إذا نتجت من متتالية منتهية .

فالمتتالية $< ح_{١} ، ح_{٢} ، ح_{٣} ، ... ، ح_{د} ، ... >$.

هي متتالية غير منتهية والمتسلسلة الناتجة منها بوضع إشارة الجمع مكان الفواصل هي : $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ... + ح_{د} + ...$.

حيث يسمى $ح_{د}$ الحد النوني للمتسلسلة ، $ح_{١}$ حدها الأول ، أما المتسلسلة :

$ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ... ح_{د}$ فهي متسلسلة منتهية حدّها الأول $ح_{١}$ وحدّها الأخير $ح_{د}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

ب) ويمكن التعبير عن المتسلسلة التي حدّها النوني (العام) ج ن باستخدام رمز المجموع (مجـ) على النحو التالي : $\overset{\infty}{\underset{ن=١}{مجـ}}$ ح ن

وإذا كانت المتسلسلة منتهية فإننا نستخدم الرمز $\overset{ن}{\underset{ك=١}{مجـ}}$ ح ك

ويتبعهـــا الخـاصيتـــان مجـــم ح ك = م مجـــ ح ك ،

مجـــ (ح ك + ح ل) = مجـ ح ك + مجـ ح ل

وكثيراً ما تحتاج إلى مجموع عدد كبير من الأعداد الموضوعة في صورة متتالية، فإذا أتبعنا أسلوب الجمع بالإضافة – أي إضافة قيمة عدد إلى قيمة عدد آخر وهكذا فإن الأمر يتطلّب كثيراً من الجهد والوقت وإلى جانب احتمال الوقوع في خطأ الجمع – لذلك أمكن استنتاج قواعد في صورة علاقة رياضية نحصل منها على مجموعة الأعداد المتتالية فقط. ونظرًا لاختلاف طبيعة تركيب المتتاليات فإن العلاقة الرياضية تشتق أساساً من تركيب حدود المتتالية كما لا حظنا في حالة إيجاد مجموع متتالية حسابية ومجموع متتالية هندسية ، ومن ذلك نستنتج أنه ليس هناك قاعدة واحدة يمكن تعميمها على جميع المتسلسلات.

جـ) عنـد إيجـاد المتسلسلة أي مجموع المتتالية ، فإنه يلـزم تحـديـد المعلومـات اللازمة الآتية :

– عدد حدود المتسلسلة.

– شكل العلاقة التي تربط الحدود المختلفة.

– تحديد شكل الحد العام في المتسلسلة .

ونسرد هنا بعض طرق إيجاد بعض المتسلسلات مثل متسلسلات الأعداد الطبيعية المحدودة العدد والمرفوعة إلى قوة أعلى .

– المتسلسلة المحدودة للأعداد الطبيعية التي عدد حدودها د ، أي نأخذ المتتالية المحدودة.

< ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، (د –٢) ، (د –١) ، د > .

نلاحظ أن : ح١ =١ ، ح ن = ١ + ح ن-١ .

http://e-learning-moe.edu.ye

∴ مجـ ن ح ن = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + (ن – ٢) + (ن – ١) + ن ... (١)

وإذا أعدنا ترتيب المتسلسلة ترتيباً عكسياً لا يغير قيمته :

مجـ ن ح ن = ن + (ن – ١) + (ن – ٢) + ... + ٤ + ٣ + ٢ + ١ ... (٢)

بجمع (١) ، (٢) نحصل على

٢مجـ ن ح ن = (ن + ١) + (ن + ١) + (ن + ١) + ... + (ن + ١)

ولذلك حصلنا على عدد (ن) من الحدود كل منها يساوي (ن + ١)

∴ ٢ مجـ ن ح ن = ن (ن + ١) ، ∴ مجـ ن ح ن = $\frac{ن}{٢}$ (ن + ١)

وهذا هو مجموع متسلسلة الاعداد الطبيعية التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد ن .

– المتسلسلة المحدودة لمربعات الأعداد الطبيعية :

مربعات الأعداد الطبيعية تمثل متتالية من الأعداد ولذلك يمكن إيجاد مجموعها إذا تم تحديد العلاقة الرياضية لهذا المجموع ، متتالية مربعات الأعداد هي :

< ١^{٢} ، ٢^{٢} ، ٣^{٢} ، ٤^{٢} ، ... ، (ن – ١)^{٢} ، ن^{٢} >

وهناك عدة طرق للحصول على الصيغة الرياضية للمجموع نستعرض بعضا منها فيما يلي :

طريقة الحذف المتتالي : على سبيل المثال ، لإيجاد مجموع المتسلسلة التالية لخمس حدود : ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ٥^{٢} نضعها في صورتها العددية كما يلي .

نطرح الحد الأول ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥

نطرح الحدالأول من المتتالية الجديدة $\frac{-١ -١ -١ -١ -١}{٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤}$ = ١ × ٥ = ٥

نطرح الحدالأول من المتتالية الجديدة $\frac{-٣ -٣ -٣ -٣}{٥ + ١٢ + ٢١}$ = ٣ × ٤ = ١٢

نطرح الحدالأول من المتتالية الجديدة $\frac{-٥ -٥ -٥}{٧ + ١٦}$ = ٥ × ٣ = ١٥

نطرح الحد المتبقي $\frac{-٧ -٧}{٩}$ = ٧ × ٢ = ١٤

إلى أن نصل إلى الصفر ، ويكون $\frac{-٩}{٠}$ = ٩ × ١ = ٩

مجموع القيم التي تم طرحها = ٥٥ ،

وحيث أن باقي الطرح = صفرًا

فتكون القيم المطروحة = مجموع الأعداد ،

∴ قيمة المتسلسلة = ٥٥

http://e-learning-moe.edu.ye

ويمكن وضع عملية الجمع (جمع الفروق) على الصورة التالية :

(١×٥) + (٣×٤) + (٥×٣) + (٧×٢) + (٩×١)

وحيث أن عدد الحدود = ٥ = د فيمكن وضع العلاقة السابقة بدلالة د كما يلي :

١× (د) + ٣(د −١) + ٥(د − ٢) + ٧(د − ٣) +٩(د − ٤)

ويلاحظ إن هذه القيم تكون متسلسلة، كل حد فيها يتكوّن من حاصل ضرب مقدارين هما المتتاليتين

١) < ١ ، ٣ ، ٥ ، .... > وهي متتالية الأعداد الطبيعية الفردية ويكون حدّها العام هو ٢ ك − ١

٢) < ك ، ك − ١ ، ك − ٢ ، ك − ٣ ، ك − ٤ ، ... > وهي متتالية تناقصية حدّها الأول ك وحدّها العام [د − (ك − ١)] حيث د عدد حدود المتسلسلة مقدار ثابت إذن الحد العام للمتسلسلة هو :

ح ك = (٢ك − ١) (د − (ك − ١)) ويكون مجموع المتسلسلة هو :

$$\text{مجـــ}_{ك=1}^{د} \text{ح}_ك = \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ك^٢ = \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} (٢ك − ١) (د − (ك − ١))$$

$$= \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} (٢ ك د − ٢ ك^٢ + ٢ ك − د + (ك − ١))$$

$$= \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ٢ ك − \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ٢ ك^٢ + \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ٢ك − \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} د + \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ك − \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ١$$

$$= ٢ د \text{ مجـــ}_{ك=1}^{د} ك − ٢ \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ك^٢ + ٣ \text{ مجـــ}_{ك=1}^{د} ك − د \text{ مجـــ}_{ك=1}^{د} ١ − \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ١$$

$$= ٢ د \left(\frac{ك (ك + ١)}{٢} \right) − ٢ \text{ مجـــ}_{ك=1}^{د} ك^٢ + ٣ \left(\frac{ك (ك + ١)}{٢} \right) − د ك − ك$$

$$\therefore \text{مجـــ}_{ك=1}^{د} ك^٢ + ٢ \text{ مجـــ}_{ك=1}^{د} ك^٢ = ٢ د \frac{(ك (ك + ١))}{٢} + \frac{٢ د ك}{٢} + \frac{٣(ك^٢ + ك)}{٢} − \frac{٢ ك}{٢}$$

$$٣ \text{ مجـــ}_{ك=1}^{د} ك^٢ = \frac{٢ د ك^٢ + ٢ د ك + ٢ د ك + ٣ ك^٢ + ٣ ك − ٢ ك}{٢}$$

http://e-learning-moe.edu.ye

وبعد إجراء عملية جمع الحدود تصبح ك = د

$$\therefore ٣ \text{ مجـــ } ك^{٢} = \frac{٢ د^{٣} + ٢ د^{٢} - ٢ د^{٢} + ٣ د + ٣ د - ٢ د}{٢}$$

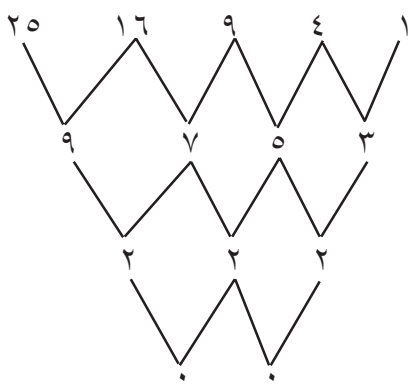
$$= \frac{٢ د^{٣} + ٣ د^{٢} + د}{٢} = \frac{د (د + ١) (٢ د + ١)}{٢}$$

$$\therefore \text{ مجـــ}_{ك = ١}^{د} ك^{٢} = \frac{د (د + ١) (٢ د + ١)}{٦}$$

وهو قانون إيجاد مربعات الأعداد الطبيعية من ١ إلى د .

طريقة الفروق :

هذه الطريقة أسهل من سابقتها وأكثر استخداماً في إيجاد مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوى الأعلى فللحصول على مجموع مربعات الأعداد الطبيعية نتبع الخطوات التالية :



- نضع الاعداد في صورتها الطبيعية :
- نأخذ الفرق بين كل عددين متتاليين :
- نأخذ الفرق بين الفروق السابقة :
- نأخذ الفروق الأخيرة :

نلاحظ أن متتالية مربعات الأعداد تبدأ بالعدد (١)

ونلاحظ أن مجموعة اعداد الفروق الأولى تمثل متتالية حدها الأول (٣) وتزداد بمقدار وحدتين وأن عدد حدودها يقل واحداً عن حدودالمتتالية الأصلية . كما نلاحظ أن مجموعة أعداد الفروق الثانية يمثل متتالية ثابتة التي يقل عدد حدودها بمقدار حدين عن عدد حدود المتتالية الأصلية ونلاحظ أن الفروق الثالثة تصير صفراً .

http://e-learning-moe.edu.ye

وللحصول على مجموع مربعات الأعداد الطبيعية مهما كان عدد حدودها فإننا نتعامل مع ثلاثة أعداد فقط هي :

العدد (١) وهو الحد الأول في متتالية مربعات الأعداد ويضرب × $\frac{د}{١}$

العدد (٢) وهو الحد الأول في متتالية الفروق الأولى ويضرب × $\frac{د(د-١)}{١ \times ٢}$

العدد (٣) وهو الحد الأول من المتتالية الفروق الثانية ويضرب × $\frac{د(د-١)(د-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$

وبذلك يمكن الوصول إلى مجموع مربعات الأعداد الطبيعية بتطبيق العلاقة :

$$\text{مجـــ}_{ك=١}^{د} \text{ك}^{٢} = (١) \times \frac{د}{١} + (٣) \left[\frac{د(د-١)}{٢}\right] + ٢ \left[\frac{د(د-١)(د-٢)}{٣ \times ٢}\right]$$

وبعد تبسيط ما سبق نستخدم العلاقة : $= \frac{د(د+١)(٢د+١)}{٦}$

ولإيجاد قيمة متسلسلة مكعبات الأعداد الطبيعية نستعمل أسلوب الطرق السابقة نفسه للوصول إلى العلاقة : $\text{مجـــ}_{ك=١}^{د} \text{ك}^{٣} = \left[\frac{د(د+١)}{٢}\right]^{٢}$

وبالأسلوب نفسه يمكن الحصول على مجموع متسلسلة الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى أي قوة : $\text{مجـــ}_{ك=١}^{د} \text{ك}^{٤} = \frac{١}{٣٠} د(د+١)(٢د+١)(٣د^{٢}+٣د-١)$.

http://e-learning-moe.edu.ye

توجيهات عامة :

* إعطاء الطلبة مراجعة سريعة عن التطبيق وكيفية إيجاد صورة العنصر من قاعدة التطبيق .
* تذكير الطلبة بمجموعات الأعداد المختلفة .
* توضيح متى تكون المتتالية (التطبيق) منتهي أو لانهائي .
* توضيح أن هناك متتاليات لا يوجد حد عام لها .
* ح ن هو الحد النوني للمتتالية بينما < ح ن > هي المتتالية التي قاعدتها ح ن .
* توضيح أن المتتالية تتحدد بمعرفة إما قاعدتها ، أو حدها الأول ، أو الأخير .
* توضيح أن حدود المتتالية تكون مرتبة .
* توضيح أن هناك صيغتان لقانون مجموع المتتالية الحسابية ويحدد أيهما يستخدم بالمعطيات للمسائلة .
* حث الطلبة وتعويدهم على استخدام الآلات الحاسبة وخاصة في المسائل ذات الأعداد الكبيرة .
* توضيح أنه في المتتاليات الهندسية عندما تكون القيمة المطلقة للأساس أقل من واحد وعدد الحدود كبير ، فإن $ر^{ن}$ تقترب من الصفر كما في الأمثلة في الكتاب ويؤول المجموع إلى $\frac{أ}{1 - ر}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

١ - ١ المتتاليات

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف :

- يعرّف المتتالية .
- يوجد حدود المتتالية .

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المتتالية .

الحصة الثانية : الحد العام .

الحصة الثالثة : حل أمثلة .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى التمرين التالي :

أوجد $ح_{٣}$ للمتتالية $ح_{د} = \frac{٧د - ١}{د^{٢} + ١}$

إرشادات وحلول : تمارين (٦ - ١)

[١] أ) √ ، ب) × ، جـ) × ، د) √ ، هـ) × .

[٢] أ) < ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ... >

ب) < -١ ، ٦ ، ١٣ ، ٢٠ ، ... >

جـ) < ٠ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ... >

د) < -١ ، ٣ ، -١١ ، ١١ ، ... >

هـ) < ٠ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ... >

[٣] < ٢ ، ٣ ، -٨ ، ١١ ، -١٨ ، ١٩ ، -٢٣ ، ٢٧ ، -٢٨ >

[٤] أ) $ح_{د} = -٥$

ب) $ح_{د} = ٢ \times (-١)^{ن}$

http://e-learning-moe.edu.ye

جـ) ح$_{ن}$ = ٤ + ٣ن

د) ح$_{ن}$ = ٢ن − ١

هـ) ح$_{ن}$ = ٤ن − ١

١ − ٢ المتتالية الحسابية (العددية)

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١− يعرّف المتتالية الحسابية .

٢− يوجد الحد العام لمتتالية حسابية .

٣− يكتب الصورة العامة لمتتالية حسابية .

٤− يوجد أساس متوالية حسابية .

٥− يوجد أحد حدود متتالية حسابية .

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المتتالية الحسابية .

الحصة الثانية : الحد العام والأوساط الحسابية .

الحصة الثالثة : تدريبات وتمارين .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

أوجد الحد السابع من المتتالية الحسابية التالية : < −٢ ، ٤ ، ١٠ ، ... > .

إرشادات وحلول : تمارين (١ − ٢)

[١] أ) < ٤ ، ٢ ، ٠ ، ... > ب) < ١٣ ، ١٠ ، ٧ ، ... >

جـ) < −٦ ، −٣ ، ٠ ، ... > د) < ٥ ، ٣ ، ١٠ ، ... >

[٢] أ) د = −٣ ب) د = −٢

جـ) د = $\frac{١}{٤}$ د) د = − $\frac{٩}{٤}$

http://e-learning-moe.edu.ye

[٣] < ح د > = < −٥ ، −١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... >

ح ٢٠ = ٧١

[٤] س = ١٤

١ − ٣ مجموع د حداً الأولى لمتتالية حسابية

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف :

١− يستنتج قانون مجموع د حداً لمتتالية حسابية .

٢− يوجد مجموع د حداً من متتالية حسابية .

٣− يوجد عدد حدود متتالية حسابية .

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مجموع د حداً لمتتالية حسابية .

الحصة الثانية : حل أمثلة .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى التمرين التالي :

أوجد مجموع الخمسة الحدود الأولى من المتتالية ح د = $\frac{٣\ د + ١}{٢}$.

إرشادات وحلول : تمارين (١ − ٣)

[١] أ) حـ ١٥ = ١٨,٧٥

ب) حـ ١٥ = − ١٣٥

جـ) حـ ١٥ = − ٢٧٠

[٢] من المتتالية : أ = − ٢٥

د = − ١٧ − (− ٢٠) = ٣

ل = أ + (د − ١)ء

http://e-learning-moe.edu.ye

$٥٥ = ٢٠ + (ن - ١)^{٣}$

$٧٥ = ٣ن - ٣$

$٨٧ = ٣ن$

$ن = \frac{٧٨}{٣} = ٢٦$

∴ عدد الحدود = ٢٦ حداً .

[٣] أ = ٤ ، د = ٤

$ل = أ + (ن - ١) د$

$٩٨ = ٢ + (ن - ١) \times ٤$

$٩٦ = ٤ن - ٤$

$ن = ٢٥$

∴ عدد حدود المتتالية ٢٥ حداً

[٤] $ح_{١}$ = أ مجموع حد واحد ، ومن قانون المجموع :

$ح_{ن} = ٦ن^{٢} + ٥ن$

$ح_{١} = ٦ \times ١^{٢} + ٥ \times ١ = ١١$

أ = ١١ ..... (١)

مجموع حدين :

$ح_{٢} = أ + أ + د = ٢أ + د$

$ح_{٢}$ من القانون يكون :

$ح_{٢} = ٦ \times ٢^{٢} + ٥ \times ٢ = ٣٤$

٢أ + د = ٣٤ ..... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

د = ١٢

∴ $ح_{١٦}$ = أ + ١٥د = ١٩١

[٥] ل = ١٢٦ مقعداً .

http://e-learning-moe.edu.ye

١ – ٤ المتتالية الهندسية

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١– يعرّف المتتالية الهندسية .
٢– يوجد الحد العام لمتتالية هندسية .
٣– يكتب الصورة العامة لمتتالية هندسية .
٤– يوجد أساس متتالية هندسية .
٥– يوجد أحد حدود متتالية هندسية .

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المتتالية الهندسية .

الحصة الثانية : الحد العام للمتتالية الهندسية .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

أوجد أساس المتتالية الهندسية التالية : $\left\langle \frac{٧}{٥} ، \frac{٢١}{٢٠} ، \frac{٦٣}{٨٠} ، \ldots \right\rangle$

إرشادات وحلول : تمارين (١ – ٤)

[١] أ) √ ، ب) √ ، ج) √ ، د) √ ، هـ) × ، و) × .

[٢] أ) $\left\langle ١٦ ، ٤٨ ، ١٤٤ ، \ldots \right\rangle$

ب) $\left\langle \frac{١}{١٥} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، \frac{٢٥}{٣} ، \frac{١٢٥}{٣} ، \ldots \right\rangle$

جـ) $\left\langle -٦ ، ١٨ ، -٥٤ ، ١٦٢ ، -٤٨٦ ، \ldots \right\rangle$

د) $\left\langle -٠,١٢٥ ، ٠,٠٦٢٥ ، ٠,٠٣١٣ ، \ldots \right\rangle$

هـ) $\left\langle \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٤٣} ، \ldots \right\rangle$

و) $\left\langle \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٨١} ، \ldots \right\rangle$

[٣] أ) ٤٠٩٦ ، ب) ٣١١٠٤ ،

http://e-learning-moe.edu.ye

جـ) $-\frac{١}{٣}$ ،

د) ٠,٠٠٠٠٠١ ،

هـ) ٠,٠٠٠٠١٠١ .

[٤] أ) $ح_{٩} = \frac{١}{٧٨١٢٥}$

ب) $ح_{٣} = ا ر^{٢} = ١$ ..... (١)

$ح_{٦} = ا ر^{٥} = ٤$ ..... (٢)

بقسمة (١) على(٢)

$$\frac{ا ر^{٥}}{ا ر^{٢}} = \frac{٤}{١}$$

$ر^{٣} = ٤ \Leftarrow ر = \sqrt[٣]{٤} = ٤^{\frac{١}{٣}}$

بالتعويض في(١)

$ا \times (\sqrt[٣]{٤})^{٢} = ١$

$ا \times ٤^{\frac{٢}{٣}} = ١$

$ا = \frac{١}{٤^{\frac{٢}{٣}}} = ٤^{\frac{-٢}{٣}}$

$ح_{٩} = ا ر^{٨} = -٤^{\frac{-٢}{٣}} \times (٤^{\frac{١}{٣}})^{٨}$

$= ٤^{\frac{-٢}{٣}} \times ٤^{\frac{٨}{٣}}$

$= ٤^{\frac{٦}{٣}} = ٤^{٢} = ١٦$.

http://e-learning-moe.edu.ye

١ – ٥ مجموع د حداً الأولى لمتتالية هندسية

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١– يستنتج قانون مجموع ن حداً من متتالية هندسية .

٢– يوجد مجموع ن حداً الاولى من متتالية هندسية .

٣– يحل مسائل عن المتتاليات الهندسية .

تنفيذ البند :

يتم تنفيذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مجموع المتتالية الهندسية .

الحصة الثانية : حل أمثلة .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

اوجد مجموع الخمسة الحدود الأولى من متتالية < ١ ، ٢ ، ٤ ، ... >

ارشادات وحلول : تمارين (١ – ٥)

[١] أ) $حـ_{٥} = ١٥,٢٥$ ب) $حـ_{٥} = ٧,٥$

جـ) $حـ_{٥} = -١,٧٧٨$ د) $حـ_{٥} = ٠,٤٤$

[٢] $حـ_{٨} = ١٤,٤$

[٣] $أ = \frac{١}{٢}$

$ر = ٢$

$حـ_{١٠} = ٥١١,٥$

[٤] $حـ_{٧} = ١٠٩٣$.

http://e-learning-moe.edu.ye

١ - ٦ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف :

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار :

يُنفذ الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه له من قبل المدرس بحيث يغطي أهداف الوحدة كما في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١ أ)	٣ ، ٤
ب)	٢
٢	٧ ، ٨ ، ٩
٣	٦
٤	٥

[١] أ) أوجد الحد العام للمتتالية التالية : < ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... > .

ب) أوجد الحد الثامن للمتتالية : < −٦ ، −٤ ، −٢ ، ... > .

[٢] أوجد مجموع الحدود الأربعة الأولى من المتتالية : < ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ... > .

[٣] أوجد مجموع المتتالية : < ٩ ، ٦ ، ٣ ، ... ، −٦ > .

[٤] أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين ٤ ، ١٩ لتكون متتالية حسابية .

المصطلحات

Progresion	متتالية
Sequance	متسلسلة
Arthmatic Progresion	متتالية حسابية
Geometric Progresion	متتالية هندسية
Term	حد
General term	حد عام
Summation	المجموع
Arithematic mean	متوسط حسابي
Geometric mean	متوسط هندسي

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الثانية اللوغاريتمات

جـدول تـوزيـع الحصـص

رقم البند	المـوضـــــوع	عدد الحصص
٢ – ١	مفهوم اللوغاريتم وأهميته .	٣
٢ – ٢	قواعد اللوغاريتم .	٢
٢ – ٣	اللوغاريتمات العشرية (العادية) .	٤
٢ – ٤	اللوغاريتم الطبيعي .	٢
٢ – ٥	تطبيقات اللوغاريتمات .	٣
٢ – ٦	اختبار الوحدة .	٢
	المجـمـوع	١٦

أهـداف الوحـدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يُعرف مفهوم اللوغاريتم ويقدر أهميته الرياضية .

٢ – يتعرف على قواعد اللوغاريتم باستخدام تعريف الدالة اللوغاريتمية .

٣ – يطبق قواعد اللوغاريتمات في حساب لوغاريتم الأعداد ، والأعداد المقابلة لها .

٤ – يطبق قواعد اللوغاريتمات في حل المعادلات المختلفة .

٥ – يصنف اللوغاريتمات إلى أنواع بحسب أساسها .

٦ – يحول اللوغاريتمات من صورة إلى أخرى وفقاً لأساسها .

٧ – يحل مسائل رياضية لعمليات مركبة باستخدام قواعد اللوغاريتمات وحقائقها .

٨ – يستخدم قواعد اللوغاريتمات وحقائقها في حل مسائل لفظية من واقع الحياة العملية والعلمية .

http://e-learning-moe.edu.ye

المقدمـــــــة

إن غاية الوحدة الثانية ، ببنودها الخمسة هي تنـاول خبرات التعلم المباشرة لموضوع اللوغاريتمات من الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادئ ، بما يلبي حاجة طلاب الصف الثاني الثانوي الأدبي مستقبلاً من المعرفة ــ موضوعة بدلالة الأهداف ؛ لتشكل بمستوياتها المختلفة من المهارات والعمليات الرياضية إطاراً لتوحيد مسار تفكير معلمي الرياضيات ، في التعامل مع محتوى الوحدة .

ولتحقيق تعلم فعال نضع أمام المعلم تصور حول مكونات بنود الوحدة ، وأساسيات المعرفة لكل بند التي سبق دراستها ، ذات الصلة بموضوع الوحدة ؛ لتشكل تمهيداً لفهم موضوع اللوغاريتمات ، مع إيضاح العلاقة بين كل بند وآخر كما يلي :

مفهوم اللوغاريتم وأهميته :

يتطلـب تـقديم مفهوم اللوغاريتم وأهميته ، في ضؤ أساسيات المعرفة السابقة للطالب ،عن الأسس، والصيغة الأسية لحل المعادلات بالصورة : ص = أ^{س} ، $\forall$ س $\in$ د (د مجموعة الأعداد النسبية) ، أ $\neq$ ٠ ، ١ مع التنويه إلى أن لأي قيم إختيارية لِـ س عندما يكون الأساس أ معلوماً يمكن إيجاد قيمة وحيدة لِـ ص ، والعكس صحيح أيضاً إذا عُلم كل من أ ، ص يمكن إيجاد قيمة وحيدة لِـ س ، حتى في حالة نقل الاهتمام بالأسس وقوانينها من الأعداد النسبية التي تعرف عليها الطالب سابقاً إلى الأعداد الحقيقية . إلا أن هناك معادلات أُسية أخرى غير مألوفة للطالب ، من الصعوبة حلها باستخدام الأسس لإيجاد قيمة س إذا عُلم كل من أ ، ص ، لأعداد يعتذر وضعها كقوة للأساس مثل : ٢١ =٢^{س} ، وما شابه ذلك من الأمثلة أو تعذر التعبير عن (س) بدلالة (ص) بصورة عامة ، كما هو الحال عند دراسة التقابلات العكسية ، وإيجاد معكوس التطبيقات في الصف الأول ثانوي . الأمر الذي استدعى البحث عن صيغة أخرى تسمى الصيغة اللوغاريتمية، لإيجاد قيمة (س) إذا عُلم كل من أ ، ص ، وبالتالي فإن التعريف بمفهوم اللوغاريتم يتطلب التمهيد له بمجموعة من الأمثلة ، عن الأسس والتطبيقات العكسية ، ذات الصلة الوثيقة ، بموضوع اللوغاريتم ، بإتجاه إبراز أهميته كضرورة رياضية لحل المعادلات ؛ ليأتي تحديد اللوغاريتم بالأس لقوى الأساس صيغة مكافئة للصيغ الأسية .

http://e-learning-moe.edu.ye

وعليه يتناول هذا البند ، بعد التعرف على مفهوم اللوغاريتم ، بصيغته الرمزية :

س = لو ص ، $\forall$ ص $\in ح^{*}_{+}$ ، ا $\neq$ ٠ ، ١ ما يلي :

١ – التعبير الجبري عن الصيغ الأسية ، بالصيغ اللوغاريتمية المكافئة لها .

٢ – نقل الاهتمام بالأسس وقوانينها ، إلى الدالة الأسية ، باعتبارها تطبيقاً من نوع التقابل فيه :

د : ح $\longrightarrow ح^{*}_{+}$ ، س $\longmapsto$ د (س) = ا^{س} ، $\forall$ س $\in$ ح ، ا $\neq$ ٠ ، ١

تقابله العكسي (اللوغاريتم) فيه :

د$^{-١}$: ح $\longrightarrow ح^{*}_{+}$ ، د (س) $\longmapsto$ س = لو$_{ا}$ د (س) ، $\forall$ ا $\neq$ ١

وذلك لتوضيح أن الدالتين الأسية واللوغاريتمية ، كل منهما معكوس الأخرى .

لمحة تاريخية

تشير الكثير من الكتابات في التراث العلمي ، للحضارات الإنسانية إلى أن فكرة اللوغاريتمات في الفكر العربي ، لحضارتنا الإسلامية ، منذ عام (٢١٠ هـ) بدأت بتأليف العالم العربي (سنان إبن الفتح الحراني) لكتابه (الجمع والتفريق) والذي شرح فيه الطريقة التي تحل بها المسائل القائمة على عمليتي الضرب والقسمة ، بالجمع والطرح ، وهي الفكرة التي قامت عليها فيما بعد قواعد اللوغاريتمات .

ويأتي إبن يونس المصري ، المتوفى عام (٣٩٩ هـ) ليضع لأول مرة في تاريخ الرياضيات قانون التحويل ، للانتقال من الجمع إلى الضرب ؛ بالصيغة :

جتا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ جتا (س + ص) + $\frac{١}{٢}$ جتا (س – ص) ليوضح بها أهمية الأساس لحل الكثير من المسائل المعقدة ، كما قال عنه Super في الفلك والمساحة والهندسة ، لدى علماء الفلك في القرن السادس الميلادي ، قبل اكتشاف اللوغارتم .

ومع تنامي الجهود العلمية ،وتزايد صعوبات التعامل مع ابداعات الإنسان ،منذ عهده بالحضارة ــ تابع الرياضيون العرب والمسلمون التقدم في هذا الموضوع ، حتى تمكن (إبن حمزة المغزلي) في القرن العاشر الهجري ،من اكتشاف العلاقة بين الأسس والأعداد تمهيداً لاكتشاف اللوغاريتم ، من قبل عالم الرياضيات الإنجليزي الاسكتلندي ــ جون نابير Jon Napier (١٥٥٠ – ١٦١٧م) ذو الفضل في تقديم اللوغاريتمات بأساس

http://e-learning-moe.edu.ye

(e ≃ ٢,٧١) للوغاريتم الطبيعي، واللوغاريتمات العشرية (العادية) بأساس عشرة، مع نقل الاهتمام بها كأداة للحساب ، إلى الدوال اللوغاريتمية ، الأكثر إتساعاً وتطبيقاً لنواتج العلم ، في حين ذهب بعض الباحثين المعاصرين للتأكيد على أن الخوارزمي (١٦٤ – ٢٣٥) هو الذي أبتكر اللوغاريتمات ، وعمل جداول تعرف باسمه . إلا أنه جرى تحريف لها باللغة اللاتينية، لتصبح باللفظ – Logarithm - المتعارف عليه حالياً .

ومع تزايد حاجة الإنسان إلى إجراء حسابات بدقة أفضل لمسائل معقدة،وبزمن أقل، توالت الجهود حتى تمكن العالم الفرنسي باسكال Pascal (١٦٢٣ – ١٦٦٢م) من اختراع أول آلة حاسبة ، تلاه في الجهد لتطوير تقنياتها العالم الألماني ليبنز Leibniz (١٦٤٦ – ١٧١٦م)؛ لتشكل فيما بعد تلك الجهود حافزاً للعلماء في التفكير لتطوير تقنياتها ، وتوسيع مجال استخدامها في مجال العلوم المختلفة ، بحيث أصبحت اليوم جزءاً لايتجزأ من حياة الإنسان المعاصر ، ولله الحمد الذي علم الإنسان ما لم يعلم .

خلفية علمية

أولاً : فكرة اللوغاريتمات وأهميتها :

الفكرة الأساسية للاستفادة من اللوغاريتمات ، في اجراء الحسابات وتبسيط العمليات، لمسائل معقدة في القوى والجذور الصم ، وإيجاد المساحات والحجوم – تتلخص في استخدام عمليتي الجمع والطرح بدلاً عن عمليتي الضرب والقسمة بالصورة :

$$\text{لو}\,(س_١ \bullet س_٢) = \text{لو}\,س_١ + \text{لو}\,س_٢ \ .$$

$$\text{لو}\,\frac{س_١}{س_٢} = \text{لو}\,س_١ - \text{لو}\,س_٢ \ ، \ \forall\, س_١ ، س_٢ \in ح^{*}_{+} \ .$$

ذلك لمسائل تحتوي على اعداد كبيرة أو معادلات لايمكن حلها ، أو أنها تستغرق وقتاً أكبر بالطرق العادية ، وتحتاج إلى مهارات رياضية قد لاتتوافر لدى الكثير من الناس، كالتي نجدها في العمليات المركبة ،والمسائل التطبيقية في المساحات والحجوم والهندسة والفلك ، والكثير من المسائل التي تواجه الأفراد في حياتهم العملية والأكاديمية،من البيع والشراء ، وحساب الأرباح والخسارة .

ومع تزايد الاهتمام باللوغاريتم ، والانتقال به من أداة للحساب إلى الدوال اللوغاريتمية ، ذات الاستخدام الهام المصاحب لنواتج العلم ؛ لمعالجة الكثير من قضايا

http://e-learning-moe.edu.ye

العلم في مجال الفضاء ، والتكنولوجيا ، وتنامي حاجة الإنسان إلى إجراء الحسابات بسرعة أكبر وتقريب أكثر دقة –جاءت الحسابات الآلية لتساهم إلى حد كبير ، في إنجاز الكثير من العمليات الحسابية، واختزال كثير من العمليات ما يجعلها متميزة عن جداول اللوغاريتمات، ذات التعدد في طرائق استعمالها ، والتنوع بحسب درجة التقريب التي روعيت فيها ؛ لتأخذ بظهور الآلات الحاسبة طريقها نحو الزوال ، مع تقدم العلم وتطور تقنيات الحاسبات الآلية من جهة ، ولتفتح مجالاً أوسع من جهة أخرى ، لاستخدام اللوغاريتمات ، وتطبيق قواعدها ، لمسائل أكثر تعقيداً مما سبق في ميادين العلوم والحياة المختلفة .

ثانياً : خبرات التعلم المباشرة لوحدة اللوغاريتمات :

فيما يلي نضع أمام المعلم تصور حول حقائق اللوغاريتم ، ومهاراته ومفاهيمه ، ومبادئه ، المكونة لمحتوى الوحدة ، التي يجب التركيز عليها من قبل المعلم ، أثناء عملية التدريس للوحدة ، لايضاح ما يلي :

١ – يتحدد اللوغاريتم دائماً بالأس لقوى الأساس .

٢ – لايوجد للأعداد الحقيقية السالبة لوغاريتم .

٣ – تُعرف الدالة اللوغاريتمية بمعكوس الدالة الأسية أو بالتطبيق العكسي من نوع التقابل بالقاعدة :

د : ح$^{+}$ ← ح وذلك لكل د (س) ← س = لو$_{أ}$ د(س)، أ ∈ ح – { ٠ ، ١ }

٤ – ∵ أ^{٠} = ١ فإن لو$_{أ}$ ١ = صفراً

٥ – ∵ أ = أ^{١} فإن لو$_{أ}$ أ = ١

٦ – ∵ ص = أ^{س} ⟺ س = لو$_{أ}$ ص ، فإن من تكافؤ العبارتين نجد أن :

* ص = أ$^{\text{لو}_{أ}\text{ص}}$ * س = لو$_{أ}$ أ^{س} ، أ ∈ ح – { ٠ ، ١ } .

٧ – لو$_{أ}$ ١ : غير محدد ذلك لأن : ١ = ١^{٠} = ١^{١} = ١^{٢} = ١^{٣} = . . . ، ١^{ن} ، ∀ ن ∈ ح

أي أن : لو$_{أ}$ ١ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن ليس وحيداً .

٨ – هناك ثلاث مبرهنات أساسية ، تتعلق بقواعد اللوغاريتمات ، ذات الأهمية لإجراء

http://e-learning-moe.edu.ye

الحسابات ، وتبسيط العمليات المركبة ، وحل المعادلات ، لمسائل معقدة ، التي يتعذر حلها بالطرق العادية ، مفادها أن :

* $\log_{أ} (س_{١} \cdot س_{٢}) = \log_{أ} س_{١} + \log_{أ} س_{٢}$ ، $أ \neq ١ \forall \{ ٠ ، ١ \}$.

* $\log_{أ} \frac{س_{١}}{س_{٢}} = \log_{أ} س_{١} - \log_{أ} س_{٢}$.

$\log_{أ} س^{د} = د \log_{أ} س$ ، حيث د : هي القوة النونية للعدد (س) .

تأسيساً لذلك يتأكد لنا أن أهمية حقائق اللوغاريتم وقواعده التي جاءت استجابة لحاجة الإنسان الدائمة في حياته الأكاديمية والعملية ، لتبسط الكثير من العمليات المركبة، ولتسهيل حل الكثير من المسائل الرياضية المعقدة ، التي تواجه الدارسين مستقبلاً . فمثلاً :

لحل المتباينة على الصورة : $\frac{٢٠٠}{٢^{د-١}} > \frac{١}{١٠٠٠٠} \Leftarrow ٢^{د-١} < ٢ \times ١٠^{٦}$.

$\Leftarrow ٢^{د} < ٤ \times ١٠^{٦}$ – من الصعوبة حل هذه المتباينة بالطرق العادية لإيجاد قيمة (د) ما لم نستخدم قواعد اللوغاريتمات وما شابه ذلك من الأمثلة التي قد تواجه الدارسين في النهايات ، والمتسلسلات ، وحل المعادلات ، والمتباينات ، والدوال بأنواعها المختلفة – وهكذا نجد في حالة أخرى فيما لو افترضنا أن الدالة بالصورة : $ص = س^{س} \quad \forall س \ni ح^{*}$ لاتنطبق عليها أية قاعدة في حالة أن يكون المطلوب إيجاد مشتقاتها المتتالية بالصورة التي هي عليه ما لم تستخدم قواعد اللوغاريتم ، لطرفي المعادلة ، لتكون مقدمة هامة وضرورية لتسهيل إيجاد مشتقاتها . بل أن الكثير من المسائل المعقدة في مجال الهندسة ، والفلك ،وميادين أخرى لا حصر لها تتطلب خطواتها الأولى استخدام قواعد اللوغاريتمات وحقائقها ضمن استراتيجية الحل لتلك المسائل .

٩ – هناك أنواع مختلفة من اللوغاريتمات ، مصنفة على النحو التالي :

اولاً : اللوغاريتمات العادية (العشرية) :

هي تلك اللوغاريتمات بأساس (١٠) المصنفة بدورها أيضاً إلى نوعين من اللوغاريتمات هما : اللوغاريتمات العشرية لقوى صحيحة بالصورة : ($١٠^{د}$)

http://e-learning-moe.edu.ye

حيث (د) هي القوة النونية للعدد (١٠) ، ∀ د ∋ ص* .

وأخرى لقوى غير العشرة ، على النحو الموضح التالي لبعض قيم اللوغاريتمات العشرية ، لقوى العشرة الصحيحة في الجدول (٢ – ١) اعتماداً على كون : لو ١٠ ^د = د مبرهنة (٢–٣) ، والجدول(٢ –٢) ، لحالات تحديد العدد البياني (د) والعشري (لو ب) من لوغاريتم أي عدد معطى ، بأساس (١٠) لقوى غير العشرة ، دون استخدام الآلة الحاسبة .

جدول (٢ – ١)

العدد / الفترة	٠ < س < ١				١ ≤ س < ١٠		س > ١٠		
س	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
١٠ ن	$١٠^{-٤}$	$١٠^{-٣}$	$١٠^{-٢}$	$١٠^{-١}$	$١٠^{٠}$	$١٠^{١}$	$١٠^{٢}$	$١٠^{٣}$	$١٠^{٤}$
لو س	–٤	–٣	–٢	–١	٠	١	٢	٣	٤
قيم لو س	سالبة لأن : لو س < ٠				موجبة لأن : ٠ ≤ س < ١		موجبة لأن : لو س > ١		

جدول (٢ – ٢)

العدد	الفتـرة	لو س = ن + لو ب
س < ٠	١ > س > ١٠	٠ + لو ب
	١٠ > س > ١٠٠	١ + لو ب
	١٠٠ > س > ١٠٠٠	٢ + لو ب
٠ < س < ١	٠ < س < ١	٦ + لو ب
	٠,١ > س > ٠,٠١	٢ + لو ب
	٠,٠١ > س > ٠,٠٠١	٣ + لو ب

وبدراسة بيانات الجدولين (٢ – ١) ، (٢ –٢) يلاحظ أن :

http://e-learning-moe.edu.ye

أ) في حالة اللوغاريتمات العشرية لقوى صحيحة فإنه :

* إذا كان العدد س محصور ضمن الفترة] ٠ ، ١ [فإن لو س < ٠
* إذا كان العدد محصور ضمن الفترة [١ ، ١٠] فإن ٠ ≤ لو س ≤ ١
* إذا كان العدد محصور ضمن الفترة]١٠ ، ∞ [فإن لو س > ١

ب) أما في حالة اللوغاريتمات العشرية ، لقوى غير العشرة يكتب بالصورة :

س = ب × ١٠^د ، ∀ د ∈ صـ ، ب ∈] ٠ ، ١٠ [

فإن : لو س = لو (ب × ١٠^د) = لو ب + لو ١٠^د = د + لو ب .

عندئذٍ يمكن الاستنتاج من الجدول الحالات التالية :

* إذا ضرب لوغاريتم أي عدد بعدد آخر أو قسم عليه فإن الجزء العشري للوغاريتم لا يتغير .
* إذا كان العدد المعطى هو العدد البياني (د) من لوغاريتم أي عدد فإن المنازل الصحيحة للعدد يزيد بواحدٍ عن العدد البياني من لوغاريتم العدد .
* العدد البياني من لوغاريتم أي عدد بأساس (١٠) عندما ٠ < س < ١ هو عدد سالب قيمته المطلقة تزيد بواحدٍ عن عدد الأصفار على يمين الفاصلة العشرية مباشرة .
* إذا كان العدد المعطى هو العدد البياني من لوغاريتم أي عدد فإن أول رقم غير صفري للعدد يأتي بعد الفاصلة العشرية ، ينقص بواحدٍ عن القيمة المطلقة للعدد البياني من لوغاريتم العدد .
* العدد البياني من لوغاريتم أي عدد بأساس (١٠) لـ س > ١ هو عدد موجب ، ينقص بواحدٍ عن عدد المنازل الصحيحة في العدد الأصلي .

ثانياً : اللوغاريتم الطبيعي :

يحتل اللوغاريتم الطبيعي مكانة هامة في الرياضيات حيث يرمز له بالرمز : لوهس أو (لط س – ويقرأ اللوغاريتم الطبيعي للعدد س) لتمييزه عن اللوغاريتم العشري ، للأساس (١٠)وفي الآلة الحاسبة بالرمز In لأساس (e) محسوب قيمته اعتماداً على المقدار (١ + $\frac{١}{ن}$)^د ، ∀ د ∈ ط* لتصل قيمته مقربة إلى تسعة أرقام عشرية إلى :

هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨

http://e-learning-moe.edu.ye

مع العلم أن له نفس الخواص ، ويخضع لنفس القواعد العامة للوغاريتمات .

ثالثاً : اللوغاريتمات لأساسات غير العشرة أو غير الطبيعي :

أي أن : لو س ، ∀ **ا** ∈ ح* − { ٠ ، ١ ، هـ ، ١٠ } .
ا

التي يصعب إيجادها باستخدام الآلة الحاسبة ، لكون الآلة لا تعطي إلا اللوغاريتمات العشرية بأساس (١٠) باستخدام المفتاح Log والطبيعية للأساس (هـ) باستخدام المفتاح In وبالتالي فإن الحاجة لحساب تلك اللوغاريتمات، باستخدام الآلة الحاسبة يتطلب إجراء التحويل لتغيير أساس تلك اللوغاريتمات ، إلى لوغاريتم عشري أو طبيعي بالصورة :

$$\text{لو}_{\text{ا}}\, \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{ب}}\, \text{س}}{\text{لو}_{\text{ب}}\, \text{ا}}$$ حيث ب : يرمز للوغاريتم العشري أو الطبيعي .

١٠ – إن استخدام الآلة الحاسبة ، لإجراء الحسابات وإيجاد اللوغاريتمات ، و الأعداد المقابلة لها يمثل جزءً هاماً من محتوى هذه الوحدة،وبالتالي فإن ضرورة التأكد من إجادة استخدامها يمثل هدفاً مهارياً هاماً من أهداف الوحدة ، مع العلم أن بعض الآلات الحاسبة تهيئ الفرصة لاستعمال المفتاح Y^x أو المفتاح $Y^{\frac{1}{x}}$ مباشرة ، وبعضها الآخر بواسطة المفتاح Inv أو 2ndf أو ما شابه ذلك من المفاتيح التي تؤدي إلى نفس الغرض ، وكذلك الحال بالنسبة لمقابل اللوغاريتم ؛ حيث تحتوي بعضها على المفتاح Log^{-1} وأخرى تتطلب استخدام المفتاحين Inv ← Log على التوالي من اليسار إلى اليمين .

١١ – هناك بعض الأخطاء المحتملة للطلاب ، بحكم العادة وآلية مباشرة الحل للمسائل، بحسب العمليات عليها ، التي ينبغي التنويه إليها من قبل المعلم للطلاب منها على سبيل المثال لا الحصر الحالتين التاليتين :

* $\text{لو}_{\text{ا}} (\text{س}_{١} \bullet \text{س}_{٢}) \neq \text{لو}_{\text{ا}}\, \text{س}_{١} \bullet \text{لو}_{\text{ا}}\, \text{س}_{٢}$

* $\text{لو}_{\text{ب}} \frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} \neq \frac{\text{لو}_{\text{ب}}\, \text{س}_{١}}{\text{لو}_{\text{ب}}\, \text{س}_{٢}}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

٢ : ١ مفهوم اللوغاريتم وأهميته

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١- يفسر مفهوم اللوغاريتم وبيان أهميته الرياضية .

٢- يتعرف على الصيغة اللفظية والرمزية للوغاريتم .

٣- يحول من الصيغ الأسية إلى الصيغ اللوغاريتمية المكافئة لها .

٤- يعرّف الدالة الأسية واللوغاريتمية .

٥- يستنتج حقائق اللوغاريتم .

٦- يوجد لوغاريتم الأعداد والأعداد المقابلة ، باستخدام تعريف اللوغاريتم .

٧- يحل معادلات بسيطة باستخدام تعريف اللوغاريتم .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مفهوم اللوغاريتم وأهميته.

الحصة الثانية : حل أمثلة.

الحصة الثالثة : تمارين صفية.

http://e-learning-moe.edu.ye

* **التقويم :** يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

من تكافؤ العبارتين : ص = ا^{س} ⟺ س = لو ص ، ∀ ا ∈ ح* – {١} .

أثبت أن : ص = ا$^{\text{لو}_{ا}\text{ص}}$ ، س = لو$_{ا}$ ا^{س} .

إجابات وحلول : تمارين (٢ – ١) :

[٣] أ) لو$_{٥}$ ٦٢٥ = ٤ ، ب) لو$_{٣}$ ٢٧ = ٣ ، جـ) لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ٢

د) لو$_{ص}$ س = ٥ ، هـ) لو$_{١}$ ٠,٠٠١ = – ٣ ، و) لو$_{س}$ ٨ = $\frac{٤}{٥}$

(ز) لو$_{٢}$ ٠,٥٠ = س .

[٤] أ) ١ = ٦٢٥^{٠} ، ب) ١ = ١٠^{٠} ، جـ) ٦٤ = ٤^{٣} ، د) س = ص^{١٠}

[٥] أ) لو$_{١}$ ١ = صفراً ، لو$_{٥}$ ١ = ٠ ، لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = لو$_{٥}$ ٥$^{-٣}$ = – ٣

⟺ لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = – ٣ لاستخدام مبرهنة (٢ – ٣) في الحل هنا ذلك لأن الطالب لم يتعرف عليها بعد .

ب) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠٠ = ٤ ، لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ٢ ، لو$_{١}$ ١ = ٠ ، لو$_{١٠}$ ٠,١ = – ٢ ،

لو$_{١٠}$ ٠,٠٠١ = – ٣ .

[٦] أ) ∵ لو ٢٥ = ٨س ⟺ ٢٥ = ٥^{٨س} ⟸ ٥^{٢} = ٥^{٨س}

∴ س = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$.

ب) ∵ لو $\frac{\sqrt{٤٧^{٣}}}{٢}$ = – $\frac{١}{٦}$ ⟺ س$^{-\frac{١}{٦}}$ = $\frac{\sqrt{٤٧^{٣}}}{٢}$ = ٢$^{١-\frac{٢}{٣}}$

= ٢$^{-\frac{١}{٣}}$ ⟸ س = ٤

http://e-learning-moe.edu.ye

جـ) ∵ س + ٣ = $٨^{\frac{١}{٣}}$ ∴ س = $\sqrt[٣]{٨}$ − ٣ = −١

[٧] أ) الطرف الأيمن = $لو_{١٠}$ ١٠٠٠ = س ⇔ $١٠^{٤}$ = $١٠^{س}$ ⇐ س = ٤ ... تعريف(٢−١)

والطرف الأيسر = ٤ $لو_{٢}$ ١٠ = ٤ × ١ = ٤ نتائج (٢ −١) خاصية (٣) .

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

ب) الطرف الأيمن = $لو_{٢}$ ٣٢ + $لو_{٢}$ ١٢٨

∵ $لو_{٢}$ ٣٢ = س ⇔ $٢^{٥}$ = $٢^{س}$ ⇐ س = ٥

لو ٢٨ = س ⇔ $٢^{٧}$ = $٢^{س}$ ⇐ س = ٧

∴ $لو_{٢}$ ٣٢ + $لو_{٢}$ ١٢٨ = ٥ + ٧ = ١٢

والطرف الأيسر $لو_{٢}$ ٤٠٩٦ = س ⇔ $٢^{١٢}$ = $٢^{س}$ ⇐ س = ١٢

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن .

[٨] * بفرض أن : $لو_{\sqrt{٨}}$ ٥١٢ = س ⇔ ($\sqrt{٨}$)^{س} = ٥١٢ = $٨^{٣}$

∴ ($٨^{\frac{١}{٢}}$)^{س} = $٨^{٣}$ ⇐ $\frac{١}{٢}$ س = ٣ ⇐ س = ٦

* $لو_{١٠}$ ٠,٠١ + لو ٧ = −٢ + ١ = −١

* $لو_{٣}$ ٢٧ − $لو_{٣}$ ٨١ = ٣ − ٤ = −١

[٩] استعن في الإجابة بتعريف الدالة الأسية واللوغاريتمية .

http://e-learning-moe.edu.ye

٢ - ٢ قواعد اللوغاريتمات

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف :

١- يتعرّف على قواعد اللوغاريتمات .

٢- يبرهن المبرهنات الأساسية لقواعد اللوغاريتم باستخدام تعريف (٢ - ١) للدالة اللوغاريتمية .

٣- يطبق قواعد اللوغاريتمات، لإيجاد لوغاريتم الأعداد .

٤- يطبق قواعد اللوغاريتمات، لإيجاد الأعداد المقابلة للوغاريتم .

٥- يستنتج بعض حقائق اللوغاريتمات وفق بيانات معطاة .

تنفيذ البند : ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : قواعد اللوغاريتمات.

الحصة الثانية : تمارين صفية.

*** التقويم :**

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى التمرين التالي :

ما الأهمية الرياضية لقواعد اللوغاريتمات ، موضحاً ذلك بأمثلة من لديك ، في ضوء دراستك لها ؟

إجابات وحلول : تمارين (٢ - ٢)

[١] أ) الطرف الأيمن = $\log_{١٠} \frac{١}{٩} + ٢ [\log_{١٠} ٥ + \log_{١٠} ٦]$

$= \log_{١٠} \frac{١}{٩} + ٢ \log_{١٠} ٣٠ = \log_{١٠} (\frac{١}{٣})^{٢} + ٢ \log_{١٠} ٣٠$

$= ٢ \log_{١٠} \frac{١}{٣} + ٢ \log_{١٠} ٣٠ = ٢ [\log_{١٠} \frac{١}{٣} \times ٣٠]$

$= ٢ \log_{١٠} ١٠ = ٢ \times ١ = ٢ =$ الطرف الأيسر

ب) الطرف الأيمن = $\frac{\log_{١٠} ٨ - ٣ \log_{١٠} ٩}{\log_{١٠} ٤ - ٤ \log_{١٠} ٣} = \frac{\log_{١٠} ٢^{٣} - ٣ \log_{١٠} ٣^{٢}}{\log_{١٠} ٢^{٢} - ٤ \log_{١٠} ٣}$

http://e-learning-moe.edu.ye

$$= \frac{٣ \text{ لو}_{١٠} ٢ - ٦ \text{ لو}_{١٠} ٣}{٢ \text{ لو}_{١٠} ٢ - ٤ \text{ لو}_{١٠} ٣} = \left[\frac{\text{لو}_{١٠} ٢ - ٢ \text{ لو}_{١٠} ٣}{\text{لو}_{١٠} ٢ - ٢ \text{ لو}_{١٠} ٣} \right] \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

[٢] أ) $\text{لو}_{٧} ١٥ + \text{لو}_{٧} ٣٥ - \text{لو}_{٧} ٢١ = \text{لو}_{٧} \frac{١٥ \times ٣٥}{٢١} = \text{لو}_{٧} ٥$

ب) $\text{لو}_{٤} ٥٤ - ٢ \text{ لو}_{٤} ٣ + \text{لو}_{٤} ١٢ = \text{لو}_{٤} (\frac{٥٤}{٩} \times ١٢) = \text{لو}_{٤} ٧٢$

جـ) $\text{لو}_{س} \frac{٨١}{٨} = \text{لو}_{س} ٨١ - \text{لو}_{س} ٨ = \text{لو}_{س} ٣^{٤} - \text{لو}_{س} ٢^{٣} = ٤ \text{ لو}_{س} ٣ - ٣ \text{ لو}_{س} ٢$

د) $\text{لو}_{٢} ٥ \times ٣ - \text{لو}_{٢} ٦ \times ٨ + \text{لو}_{٢} ٧ = \text{لو}_{٢} \frac{٣ \times ٥}{٨ \times ٦} \times ٧ = \text{لو}_{٢} \frac{٥}{١٦} \times ٧$

$= \text{لو}_{٢} \frac{٣٥}{١٦} = \text{لو}_{٢} ٣٥ - \text{لو}_{٢} ٢^{٤} = \text{لو}_{٢} ٣٥ - ٤ \text{ لو}_{٢} ٢ = \text{لو}_{٢} ٣٥ - ٤$.

[٣] $\because \text{لو}_{أ} ٢٤ = ١,٣٨٠٢ \iff ٢٤ = أ^{١,٣٨٠٢} \Leftarrow ٤ \times ٦ = ٦^{١,٣٨٠٢}$

$\because \text{لو}_{أ} ٦ \simeq ٠,٧٧٨٢ \iff ٦ = أ^{٠,٧٧٨٢}$

$\therefore \quad ٤ \times أ^{٠,٧٧٨٢} = أ^{١,٣٨٠٢} \Leftarrow ٤ = أ^{١,٣٨٠٢ - ٠,٧٧٨٢} = أ^{٠,٦٠٢٠}$

ومنها $\text{لو}_{أ} ٤ \simeq ٠,٦٠٢٠$.

[٤] أ) $\text{لو}_{١٠} ٦ = \text{لو}_{١٠} ٢ \times ٣ = \text{لو}_{١٠} ٢ + \text{لو}_{١٠} ٣ = ٠,٧٧٨١$

ب) $\text{لو}_{١٠} \frac{١}{٦} = \text{لو}_{١٠} ١ - \text{لو}_{١٠} ٦ = ٠ - (\text{لو}_{١٠} ٢ \times ٣) = -[\text{لو}_{١٠} ٢ + \text{لو}_{١٠} ٣] = -٠,٧٧٨١$

من الفقرة (أ) .

جـ) $\text{لو}_{١٠} \frac{٢٧}{٦٤} = \text{لو}_{١٠} ٢٧ - \text{لو}_{١٠} ٦٤ = \text{لو}_{١٠} ٣^{٣} - \text{لو}_{١٠} ٢^{٦} = ٣ \text{ لو}_{١٠} ٣ - ٦ \text{ لو}_{١٠} ٢$

$= ٣ (٠,٤٧٧١) - ٦ (٠,٣٠١٠) = ١,٤٣١٣ - ١,٨٠٦٠$

$= \bar{١},٦٢٥٣ = -٠,٣٧٤٧$.

د) $\text{لو}_{١٠} ٠,٣ = \bar{١},٤٧٧١ = -٠,٥٢٢٩$.

http://e-learning-moe.edu.ye

[٥] أ) س = $٢^{\text{لو}_{٢}٣}$ = ٢ لو ٩ ⟸ س = ٩ نتيجة (٢ – ١) .خاصية (١)

ب) لو$_{٥}$ س = لو$_{٥}$ ٦ ⟸ س = ٦ .

جـ) لو$_{١٠}$ س = لو$_{١٠}$ ١٦$^{\frac{٣}{٢}}$ ⟸ س = ١٦$^{\frac{٣}{٢}}$ = $(٢^{٤})^{\frac{٢}{٣}}$ = $٢^{٦}$ = ٦٤ .

د) س = ٢ لو$_{٣}$ ٦ – لو$_{٣}$ ٤ = لو$_{٣}$ $٦^{٢}$ – لو$_{٣}$ ٤ = لو$_{٣}$ $\frac{٣٦}{٤}$ = لو$_{٣}$ ٩ .

= لو$_{٣}$ $٣^{٢}$ = ٢ لو$_{٣}$ ٣ = ٢ ∴ س = ٢ .

٢ – ٣ اللوغاريتمات العشرية (العادية)

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف :

١– يتعرّف أنواع اللوغاريتمات العشرية ورمزها .

٢– يستنتج بعض قيم اللوغاريتمات العشرية لقوى العشرة الصحيحة بالصورة :

$١٠^{د}$ ، ∀ د ∈ ص .

٣– يوجد لوغاريتم الأعداد ؛ والأعداد المقابلة باستخدام الآلة الحاسبة .

تنفيذ البند :

يُنفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : لتناول مفهوم اللوغاريتمات العشرية واستنتاج بعض قيم اللوغاريتمات لقوى العشرة الصحيحة اعتماداً على كون لو$_{١٠}$ $١٠^{د}$ = د

الحصة الثانية : مناقشة الأمثلة .

الحصتان الثالثة والرابعة : تمارين صفية .

التقويم : يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى السؤال التالي :

http://e-learning-moe.edu.ye

اذكر أنواع اللوغاريتمات العشرية موضحاً طبيعة الفرق والاتفاق بينها .

إجابات وحلول : تمارين (٢ - ٣)

[١] ∵ PH = – لو [H^+] ∴ ٦,٨ = – لو [H^+] . باستخدام الآلة الحاسبة بالصورة :

→ 6.8 | $^+/_-$ | INV | log | → 0.00000016

أي أن تركيز الهيدروجين [H^+] = ٠,٠٠٠٠٠٠١٦ = ١,٦ × $١٠^{-٧}$.

[٢] لو س = ١,٤٦٢٣ ⟺ س = $١٠^{١,٤٦٢٣}$ .....(١)

، لو ص = ٣,٤٦٢٣ ⟺ ص = $١٠^{٣,٤٦٢٣}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : ص = $١٠^{٢}$ س = ١٠٠س

[٣] ب < ج ذلك لأن ب = ١٠جـ .

[٤] س = ٤ أرقام .

[٥] س = ٦ أرقام .

[٦] أ) لو ٠,٠٠٦٨٢٦ = لو ٦٨,٢٦ × $١٠^{-٤}$ = لو٦٨,٢٦ + ٤

= ١,٨٣٤٢ + $\bar{٤}$ = $\bar{٣}$,٨٣٤٢

ب) لو ٦,٨٢٦ = ٠,٨٣٤٢

جـ) لو ٦٨٢٦ = ٣,٨٣٤٢

[٧] أ) ٤٤٤,٨٣٦١ ، ب) ٠,٠٠٢٢٤٨٠١٩

جـ) ٤٤٤٨٣٦٠٧,٤٩ ، د) ١,٠١٣٣٥

هـ) ٠,٠٩٩٨٦١٩٤ ، و) ١٠,٠١٣٨٢٥٠٦

[٨] لو ($\frac{أ}{ب}$)^{٢} = ٢ لو $\frac{أ}{ب}$ = ٢ [لو أ – لو ب]

⟸ ٢ [لو٣,٤٥٧ – لو٠,٠٠٢٦١] = ٢ [$\bar{٣}$,٤١٦٦ – ٠,٥٨٣٧] = ٦,٢٤٤١ .

[٩] أ) صحيحة ب) خاطئة ، ج) صحيحة ، د) صحيحة ، هـ) خاطئة ، و) خاطئة ، ز) خاطئة ، ح) صحيحة ، ط) صحيحة ، ي) صحيحة .

http://e-learning-moe.edu.ye

٢ – ٤ اللوغاريتم الطبيعي

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف :

- يتعرّف على مفهوم اللوغاريتم الطبيعي ورمزه وقيمته .
- يوجد اللوغاريتم الطبيعي للأعداد والأعداد المقابلة ، باستخدام الآلة الحاسبة .
- يجرى التحويلات المختلفة للوغاريتم وفق أساسها .
- يحل معادلات باستخدام خواص اللوغاريتم الطبيعي .

تنفيذ البند :

يُنفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : اللوغاريتم الطبيعي.

الحصة الثانية: تمارين صفية.

إجابات وحلول : تمارين (٢ – ٤)

[١] أ) ٤ ، (ب) ١٦,٩٩٩٩ ، جـ) ٠,٤٩٩٩٩٩٩٩

[٢] ∵ هـ$^{٢-ص}$ = ١٢ ⟸ لط هـ$^{٢-ص}$ = لط١٢ .

⟸ (٢ – ص) لط هـ = لط١٢ ⟸ (٢ – ص) × ١ = لط١٢

⟸ ص = – [لط١٢ – ٢] = ٢ – لط١٢ ≃ – ٠,٤٨٤٩١

[٣] أ) لو$_{٥}$١٠٠ = $\frac{\text{لو}\,١٠٠}{\text{لو}\,٥}$ = $\frac{٢}{٠,٦٩٨٩٧}$ ≃ ٢,٨٦١٣٥٣

ب) لو$_{٠,٥}$٦ = $\frac{\text{لو}\,٦}{\text{لو}\,٠,٥}$ = $\frac{٠,٧٧٨١٥}{-٠,٣٠١٠٣}$ = – ٢,٥٨٤٩٦

جـ) لو$_{١٠٠}$٥ = $\frac{\text{لو}\,٥}{\text{لو}\,١٠٠}$ = $\frac{٠,٦٩٨٩٧}{٢}$ = ٠,٣٤٩٤٨٥

[٤] ∵ لو س = ٢ ⟸ س = ١٠٠ ∴ لط ١٠٠ ≃ ٢,٣٠٢٥٨٥

http://e-learning-moe.edu.ye

[٥] أ) تعلم من الخاصية (١) للنتيجة (٢ – ١) أن :

س = هـ^{لط س} أي أن : س = هـ^{لط ٠,٠٠٥} = ٠,٠٠٥

ب) هـ^{لط٨ – لط٤} = هـ^{لط ٨/٤} = هـ^{لط٢} = ٢ .

جـ) $٣^{\frac{لو٩}{لو٣}} = ٣^{\frac{٢\ لو٣}{لو٣}} = ٣^{٢} = ٩$. د) –٣ .

٢ – ٥ تطبيقات اللوغاريتمات

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

- يطبق خواص اللوغاريتمات ، لتبسيط مسائل معقدة في القوى والجذور الصم .
- يطبق خواص اللوغاريتمات في حل المعادلات .
- يطبق خواص اللوغاريتمات في حل مسائل تطبيقية من واقع الحياة العملية.
- يستخدم الآلة الحاسبة في إجراء الحسابات .

تنفيذ البند : يُنفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : حل الأمثلة

الحصتان الثانية والثالثة : تمارين صفية :

التقويم : يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

أحسب قيمة $(\sqrt{١٧} + ٩)^{\frac{١}{٢}}$

إجابات وحلول : تمارين (٢ – ٥)

[١] بالتحويل إلى الصيغة الأسية بالصورة : $س^{٢} = ٥ س – ٦$

$س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠$ وتحليل المقدار بالصورة :

(س – ٢) (س – ٣) = ٠ ∴ مجموعة الحل = { ٢ ، ٣ } .

[٢] أ) ١٦٥٣,٧٥ ، ب) ١,١٩٧٨٨ ، جـ) ٠,٩٢٧٦١٤

[٣] ∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢}

∴ ٤٥٧,٦ = ٣,١٤١٦ نق^{٢}

http://e-learning-moe.edu.ye

$\Leftarrow$ لو $\frac{٤٥٧,٦}{٣,١٤١٦}$ = لونق^{٢} $\Leftarrow$ ٢ لو نق = لو٤٥٧,٦ – لو٣,١٤١٦

$\Leftarrow$ لو نق = ١,٠٨١٦٦٨ نق = ١٢,٠٧سم (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

وللتحقق من صحة الحل نجد أن المساحة = π نق^{٢} = (١٢,٠٧)^{٢} تساوي المساحة المعطاة في التمرين .

[٤] حجم الشمس (س) = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} $\Leftarrow$ لو س= لو $\frac{٤}{٣}$ π (٦,٩٦ × ١٠$^{\circ}$)^{٣}

= لو $\frac{٤}{٣}$ + لو π + ٣ [لو٦,٩٦ + لو١٠$^{\circ}$]

= لو٤ – لو٣ + لو π + ٣ لو ٦,٩٦ + ١٥لو١٠

= ٠,١٢٤٩٣ + ٠,٤٩٧١٥ + ٢,٥٢٧٨٣ + ١٥ ≃ ١٨,١٤٩٨٨

∴ س = ١,٤١٢١٤٧ × ١٠^{١٨} كم٣

وحجم الأرض = ١,٠٨٧٨٠٦٥ × ١٠^{١٢}كم٣

∵ الكثافة (ص) = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$ فإن : لو ص = لو(الكتلة) – لو (الحجم)

وبالتعويض عن الكتلة والحجم المعطاة في التمرين وإيجاد العدد المقابل للوغاريتم ينتج المطلوب ، على النحو الموضح في الجدول التالي :

البيان	الكتلة	نصف القطر	الحجم	الكثافة
الشمس	١,٩٩×١٠^{٣٠} كجم	٦,٩٦×١٠^{٨} كم	١,٤١٢١٤٧×١٠^{١٨}كم^{٣}	١,٤٠٩٢×١٠^{١٢}
الأرض	٥,٩٧ ×١٠^{٢٤}	٦,٣٨×١٠^{٣} كم	١,٠٨٧٨٠٦٥×١٠^{١٢}	٥,٤٨٨×١٠^{١٢}

٥ – أ) س = ٤,٨٥٧٩٨ ، ب) ليس لها حل .

٦ : ٢ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف :

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تحقق أهداف الوحدة ، بمستوياتها المختلفة.

http://e-learning-moe.edu.ye

تنفيذ الاختبار :

يُعطى الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه له من قبل المدرس بحيث يغطي أهداف الوحدة على النحو الموضح في الجدول (٢ – ٤) التالي :

جدول (٢ – ٤)

رقم السؤال	رقم الفقرة	رقم الهدف
١	أ ، ب	١
٢	–	٥
٣	أ	٢ ، ٣
	ب	٢ ، ٣
٤	أ	٤ ، ٧
	ب	٤
	جـ	٤
	د	٤
٥	أ	٦
	ب	٦
	جـ	٦
	د	٦
٦	–	٨

http://e-learning-moe.edu.ye

الاختبار :

[١] أ) اكتب الصيغة العامة بالرموز لتعريف الدالة اللوغاريتمية .

ب) لماذا لايكون للأعداد الحقيقية السالبة لوغاريتم ؟

[٢] وضح الفرق بين اللوغاريتم العشري والطبيعي .

[٣] أكمل الفراغات التالية :

أ) لو$_{أ}$ (س . ص) = ... + ...

ب) لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = ... − .....

[٤] أوجد قيمة س فيما يلي :

أ) لو$_{س}$ ٥٢ = ٢ .

ب) لو$_{\sqrt{٣}}$ س = ٢

جـ) أ$^{لط\ س}$ = ٥

د) لو$_{س}$ (س + ٥) = ٢ .

[٥] أوجد قيمة ما يلي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) لو$_{\sqrt{٣}}$ $\sqrt{١٨٧}$.

ب) لو$_{٥}$ ١٧ .

جـ) لط هـ$^{لو_{١٠}}$.

د) لو ٢٧٦ .

[٦] إذا كانت مساحة أرض مربعة الشكل = ١٧٣,٤٤٨٩م^{٢} ، فأوجد طول ضلع المربع لهذه الأرض .

المصطلحات والرموز المستخدمة في هذه الوحدة

لوغاريتم	Logarithm (log)
أساس	Base
قوة	Power
الاقتضاء	$\Longleftrightarrow$
التضمين	$\Longleftarrow$
يوجد	Exist ($\exists$)
لكل	$\forall$
شكل	Figer

http://e-learning-moe.edu.ye

قائمة المراجع

أولاً : المراجع العربية :

١ – أبـو زينـــة ، فريد (١٩٨٢م) الرياضيات مناهجها وأصول تدريسها . دار الفرقان للنشر والتوزيع ، ط٢ ، عمان الأردن .

٢ – بل فريدريك (١٩٨٧م) . ترجمة محمد المفتي ، وممدوح سليمان ، طرائـق تدريس الرياضيات، الدار العربية للنشر، والتوزيع، ط٢ الجزء الثاني، القاهرة ، مصر .

٣ – حضاونة ، أمل (١٩٩٤م) مستويات التفكير الرياضية – مجلة أبحاث اليرموك ، المجلد العاشر ، العدد الأول .

٤ – خضر ، نظلة حسن (١٩٨٢م) أصول تدريس الرياضيات . عالم الكتب ، ط٢ ، القاهرة ، مصر .

٥ – مركز البحوث التربوي (١٩٩٩م) وثيقة منهاج الرياضيات للصفوف (٧ – ١٢) منشورات المركز ، صنعاء ، اليمن .

٦ – المسوري ، محمد حسن (٢٠٠٠م) الإطار المفاهيمي لمنهاج الرياضيات في ضوء عدد من المعايير العربية والعالمية – رسالة دكتوراة – جامعة الجزيرة – السودان .

ثانياً : المراجع الاجنبية :

1) Van Hiele , P.M (1986) Structure and Insight : Atheory of Mathematics Education . Orlando : Academic press .

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الثالثة المصفوفات والمحددات

جـدول تـوزيـع الحصـص

رقم البند	المـوضـــــوع	عدد الحصص
٣ – ١	المصفوفات .	٣
٣ – ٢	العمليات على المصفوفات .	٦
٣ – ٣	المحددات .	٣
٣ – ٤	حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى .	٤
٣ – ٥	اختبار الوحدة .	٢
	المجـمـوع	١٨

أهـداف الوحـدة

يتوقع من الطالب بعد تدريس هذه الوحدة أن يكون قادرا على أن :

١ – يعرّف المصفوفة من حيث مكوناتها ومفهومها وأنواعها .

٢ – يذكر شروط تساوي مصفوفتين، وشروط جمع مصفوفتين وطرحهما .

٣ – يوجد مجموع المصفوفات وفرقها ، ويستخـدم خـواص عمليتي الجمع والطـرح على المصفوفات .

٤ – يضرب مصفوفة في عدد ، ويضرب مصفوفتين ببعضهما ويستخدم خـواص ضرب المصفوفات .

٥ – يعرّف المحددة ، ويستخدم خواصها .

٦ – يحل نظام معادلات من الدرجة الأولى ، ذات متغيرين أو ثلاثة متغيرات على الأكثر باستخدام المحددات .

٧ –يحل مسائل تطبيقية على المصفوفات والمحددات .

http://e-learning-moe.edu.ye

المقدمة

لمحة تأريخية

يعود استخدام المصفوفات للعالم البريطاني كيلي (Arthur Kelley) (١٨٢١– ١٨٧٥) ، وهو أول من قدم صيغة مفهومة عن المصفوفات ، وبعد ذلك أدرك العالم أهمية المصفوفات ، فقد أُستخدمت في معظم فروع العلم والمعرفة ، فهي تُستخدم في أغلب أنظمة المعادلات الخطية ، وفي حل مسائل البرمجة الخطية ، كما أن التطور المعرفي الهائل ، وما يترتب عليه من كثرة المعلومات وتنوعها ، استدعى البحث عن طريقة لحفظها وتخزينها واسترجاعها عند الحاجة ، بحيث أصبحت المعلومات تتضاعف مرة كل أربع سنوات ، وأن إحدى الطرق التي استخدمت لتنظيم البيانات هي كتابتها في صفوف وأعمدة لتكون ما يسمى بالمصفوفة . وهذه الطريقة مفيدة في إدخال البيانات إلى الحاسوب وإجراء العمليات عليها ، ليتم الحصول على المعلومة ، كما أن الحاسوب يتعامل مع البيانات المدخلة كمصفوفات من الأرقام الثنائية (٠ ، ١) حتى يتم تحليلها ومعالجتها للإستفادة منها ، مما يعني أن للمصفوفات دوراً كبيراً في هذه التقنية المذهلة، والتي تمثل عصرنا الحالي عصر ثورة المعلومات .

خلفية علمية

إن الأرقام والأعداد وتركيبها وتنظيمها لها جاذبية ، وسحر عجيب ، ودلالات عظيمة في التعبير عن الأشياء ، ومكوناتها وتراكيبها . فعند تركيب مجموعة من الأرقام، أو الأعداد فوق بعض أو بجانب بعض ، فإنها تعطي معناً رياضياً من خلال تعريف أو إجراء عمليات حسابية عليها ، فبوضع هذه الأعداد داخل أقواس من اليمين ومن اليسار بترتيب خاص . وتحديد كيف تُجمع وتُطرح وتُضرب هذه الأعداد ، والذي يمكن القول بأنها تمثل مصفوفات، وكذلك كيف تقسم مصفوفة على أخرى فإننا نحصل منها عندئذ على إمكانيات رياضية جديدة ، تخضع شأنها شأن الأعداد وتحت ظروف معينة لمختلف أنواع العمليات الرياضية . وفي الحقيقة فإن هذا يشكل فرعاً هاماً من علم الجبر ، يندرج تحت عنوان (المصفوفات والمحددات) . ولهذا الموضوع تطبيقات هامة ومفيدة في كثير من العلوم ، وفي العديد من القضايا والمسائل التي تواجهنا في الحياة . لقد أصبح هذا الموضوع أداة هامة من الأدوات التي نواجه اليوم بها مشاكل الحياة المعاصرة ، فالمصفوفات

http://e-learning-moe.edu.ye

تُستخدم في كثير من العلوم الإنسانية ، وفي الاقتصاد ، وعلم الاجتماع ، والفيزياء ، والكيمياء ، والإحصاء ، والهندسة بمختلف أنواعها وتقسيماتها ، ولهذا أرى بأن تقدم للطالب لاهميتها في دراسته اللاحقة ، والاستفادة منها في مجالات الحياة المختلفة .

ولتحقيق أهداف دراسة هذا الموضوع فقد قُسِّم إلى أربعة عناوين يمكن تلخيصها كما يلي :

أولاً : المصفوفة :

وفي هذا البند تم تقديم مفهوم المصفوفة وتوضيحها بأشكال تقريبية واقعية بهدف التدرج في الموضوع بسهولة ويسر يمكن للطالب استيعاب تلك المفاهيم ، وقد تم تمثيل المصفوفة على هيئة صفوف وأعمدة ورمزنا لعدد الصفوف بالرمز (م) ، وعدد الأعمدة بالرمز (ن) ، وتكتب المصفوفة على شكل قوسين مستطيلين على النحو [ ] ، وعبرنا عن اسم المصفوفة بحرف هجائي تحته خط ، حتى يكون هناك فرق بين اسم العنصر والمصفوفة . وللمعلم اختيار ما يراه مناسبا لتقريب فكرة المصفوفة للطالب ، كجدول الحصص الاسبوعي للطالب ، أو جدول مباريات كرة القدم في الدوري العام للمجموعة مثلا ، أو جدول مباريات كأس العالم ، أو مباريات تصفية لعبة تنس الطاولة في المدرسة ، كما يمكن استخدام التعريفات لحل الأمثلة أو التدريبات أو التمارين لنثبت مفهوم المصفوفة وعناصرها ، واستخدام التعبيرات الرمزية عن المصفوفة أوالعناصر أو الصفوف أو الأعمدة ، كما أن تساوي المصفوفات يتحقق في الحالة التي يكون فيها صفوف وأعمدة المصفوفة (أ) مثلا مساوية لصفوف وأعمدة مصفوفة أخرى ولتكن (ب) ، وجميع العناصر المكونة لكلتا المصفوفتين متساوية ، أي أن العنصر الأول بالمصفوفة أ يساوي العنصر الأول في المصفوفة ب .. وهكذا في بقية العناصر في المصفوفتين أ ، ب .

مثلاً :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٦ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

http://e-learning-moe.edu.ye

وهي مصفوفة من النوع (٣ × ٢) ، ويُقصد بها مصفوفة ذات ثلاثة صفوف وعمودين، ويرمز لجميع عناصرها بالرمز $أ_{ى هـ}$ ، حيث ى = ٤ ، هـ = ٢ ، ونمثل العنصر الأول بالرمز $أ_{١١}$ = ٥ ، حيث يمثل العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول : أما الرمز $أ_{٢١}$ ، فيُعنى به العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني .. وهكذا ، كذلك فإن الصف الأول للمصفوفة أ يتكون من العنصرين (٥ ، س) والصف الثاني فيتكون من العنصرين (١ ، ٣) أما أعمدتها فتتكون من العناصر (٥ ، ٦ ، ١) ، (س ، ٢ ، ٣) ، وهي تمثل العمود الأول والعمود الثاني على الترتيب .

مثلاً :

لتكن $أ = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ص \end{bmatrix}$ فيقال عنهما بأنهما متساويتان

أي أن : $أ = ب$ إذا كان س = ٥ ، ص = −١ ، وكذلك بقية العناصر متساوية وأن للمصفوفتين نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة . وبالتالي فإن شرطي تساوي المصفوفتين قد تحققا وهما :

أ – إن عدد الصفوف والأعمدة في كلتا المصفوفتين متساوية .

ب – إن جميع العناصر المتناظرة المكونة للمصفوفتين متساوية .

وإذا توفر الشرطان السابقان لأكثر من مصفوفتين ، فيمكن القول عليها بأنها مصفوفات متساوية . والمصفوفات متنوعة وسنستعرض البعض منها كما يلي :

١ – المصفوفة المستطيلة :

وهي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة ومنها مصفوفة الصف والتي من النوع ١ × ن ، ومصفوفة العمود التي من النوع (م × ١) .

٢ – المصفوفة المربعة :

وهي مصفوفة من الرتبة (ن × ن) وفيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة ، وأن القطر الرئيس فيها تمثله العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، ... ، $أ_{مم}$.

٣ – المصفوفة القطرية :

وهي مربعة جميع عناصرها أصفار عدا الرئيس ، بغض النظر عن نوع المصفوفة .

http://e-learning-moe.edu.ye

٤ – مصفوفة الوحدة :

وهي مصفوفة مربعة فيها كل عنصر من عناصر القطر الرئيس يساوي الواحد العناصر أصفار .

٥– المصفوفة الصفرية :

وهي مصفوفة مربعة من النوع (ن × ن) – ١ ، وفيها م = ن – ١ ، أو مستطيلة وفيها م ≠ ن ، وكل العناصر المكونة للمصفوفة أصفار .

٦ – المصفوفة المثلثية :

وهي مصفوفة مربعة فيها العناصر فوق القطر الرئيسي أو تحته أصفار ، وشكل العناصر الصفرية تشبه المثلث .

أما البند الذي تم دراسته فهو :

ثانياً : العمليات على المصفوفات :

إذا طبقنا العمليات الأربع على المصفوفة ، قد نلاقي بعض القيود في بعض العمليات مثل عدد صفوف وأعمدة المصفوفة أو تَساوي العناصر في المصفوفة ، مثال على ذلك في عملية جمع المصفوفات يُشترط فيها تَساوي نوع المصفوفتين ، أي تساوي الصفوف والأعمدة فيها ، ولا يُشترط تساوي عناصرها ، وهذا ينطبق على عملية الطرح .

مثلاً : لتكن

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ & ٧ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{bmatrix} ، \underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ \frac{١}{٢} & ١ & ٥ \end{bmatrix}$$ فإن عملية جمع المصفوفتين

هو $\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \\ \frac{٣}{٢} & -١ & ٨ \end{bmatrix}$

وأيضا يمكن تطبيق عملية الطرح بحيث أن $\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٥ \\ \frac{١}{٢} & -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

وهي مصفوفة من النوع نفسه ، ولكنها مصفوفة لا تُساوي مصفوفة ناتج الجمع .

http://e-learning-moe.edu.ye

وهناك بعض الخواص الهامة في عملية جمع المصفوفات :

الخاصية الأولى :

إن ناتج جمع مصفوفتين من النوع نفسه (م X ن) ، يكون مصفوفة لها النوع نفسه من حيث عدد الصفوف و الأعمدة ، أن تكون مصفوفة من النوع (مXن)

الخاصية الثانية :

إن عملية جمع مصفوفتين هي عملية ابدالية ، بحيث يكون $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$

وبالعودة للمثال (٣ – ٢) نجد أن :

$$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \\ \frac{٣}{٢} & -١ & ٨ \end{bmatrix}$$ ـــــ (١) أما

$$\underline{ب} + \underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ \frac{١}{٢} & ١ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٧ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \\ \frac{٣}{٢} & -١ & ٨ \end{bmatrix}$$ ـــ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن الخاصية (٢) متحققة .

الخاصية الثالثة :

إن عملية جمع المصفوفات ، هي عملية تجميعية أي أن :

$(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$.

الخاصية الرابعة :

وهذه الخاصية تُحقق وحدانية المصفوفة الصفرية ، فإذا كان لدينا مصفوفة صفرية والتي رمزنا لها بالرمز ($\underline{٠}$) ، والتي هي مصفوفة من النوع م X ن أو من الرتبة (نXن)، وبالتالي فإن : $\underline{أ} + \underline{٠} = \underline{٠} + \underline{أ} = \underline{أ}$ ، وتسمى بالمصفوفة المحايدة ، في عملية الجمع، مثلها مثل العدد صفر ، والذي يمثل عنصر محايد في العمليات الثنائية .

ملاحظة :

في حالة الطرح فإن الخواص السابقة تكون غير متحققة .

أما عملية الضرب على المصفوفات، فهناك ضرب مصفوفة في عدد ، فإذا ضُرِبَت المصفوفة سواء كانت مربعة أو مستطيلة في عدد حقيقي ، يكون الناتج مصفوفة من

http://e-learning-moe.edu.ye

النوع نفسه . وعملية ضرب مصفوفة في عدد يمثل عملية ابدالية ، أي أن :

ك • أ = أ • ك .

أما ضرب مصفوفتين أو أكثر فيُشترط فيها أن يكون عدد أعمدة المصفوفة (أ) مساوية لعدد صفوف المصفوفة (ب) ، أما في حالة أكثر من مصفوفتين فنأخذ المصفوفة الأولى مع المصفوفة الثانية ، بعد التأكد من تحقق شرط ضرب مصفوفتين ، فإذا كان متحققاً نقوم بعملية الضرب ، والناتج بالتأكيد يكون مصفوفة توضع على يمين المصفوفة الثالثة ، ثم نتأكد من تحقق شرط ضرب المصفوفة الناتجة في المصفوفة الثالثة ، فإذا كان الشرط متحققاً يمكن القيام بعملية الضرب الأخيرة ، وبالتالي فإن الناتج هو مصفوفة لحاصل ضرب المصفوفات الثلاث . . وهكذا يمكن تطبيق ما سبق في حالة أكثر من ثلاث مصفوفات . من خصائص ضرب المصفوفات هي :

١ – إن عملية الضرب على المصفوفات يحقق الخاصية التجميعية ، أي أن :

(أ ب) جـ = أ (ب جـ) .

٢ – إنّ عملية الضرب على المصفوفات يُحقق الخاصية التوزيعية ، بحيث أن :

أ + (ب + جـ) = أ ب + أ جـ .

٣ – إن عملية الضرب على المصفوفات هي عملية ابدالية ، ولكن ليس بالضرورة أن تكون متحققة دائماً .

وعند تحويل صفوف المصفوفة إلى أعمدة أو الأعمدة إلى صفوف في المصفوفة فإننا نقول عنها مصفوفة مدورة ، ويرمز لهذه المصفوفة بشرطة مائلة فوق رمزها أي أن

أ ← أَ ، أما إذا قمنا بتدوير المصفوفة المدورة فسنحصل على المصفوفة الأصلية (أَ)َ = أ ، وعملية تدوير المصفوفة لها خصائص ، يمكن تلخيصها بالآتي :

١ – عند تدوير مصفوفة مُدَوَرة ، نحصل على المصفوفة الأصلية ، أي أن (أَ)َ = أ .

٢ – مدور مجموع مصفوفتين يساوي مُدَوَر المصفوفة الأولى مضافا إليه مُدَوَر المصفوفة الثانية ، أي أن : (أ + ب)َ = أَ + بَ .

٣ – إنّ مُدَوَر حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب مُدَوَر المصفوفة الثانية في مُدَوَر المصفوفة الأولى ، أي أن : (أ ب)َ = بَ أَ .

http://e-learning-moe.edu.ye

ثالثاً : المحددات :

المحددة عبارة عن مصفوفة مربعة من الرتبة (ن X ن) ، وتُميز المحددة عن المصفوفة بوضع العناصر المكونة داخل خطين رأسيين (عموديين) ، وتكون هذه العناصر محصورة بينهما ، أي أن المحددة تكون بالشكل | | ، وتتنوع المحددات بحسب نوع الرتبة ، فهناك محددة من الدرجة الثانية ، محددة من الدرجة الثالثة ، محددة من الدرجة الرابعة ... الخ ، وعند فك أي محددة :

أولاً : نختار العوامل من خلال أي صف أو عمود في المحددة المراد فكها .

ثانياً : مراعاة الإشارة عند اختيار الصف ، أو العمود .

ثالثاً : إن ناتج فك المحددة هو نفسه بغض النظر عن اختلاف وتنوع الاختيارات للصفوف، أو الأعمدة التي يتم على أساسها الفك ومن طرق فك المحددة :

١ ■ الطريقة (الصفوف والأعمدة) « النشر » . ٢ ■ طريقة ساروس .

والطريقة الثانية تنطبق فقط على المحددة من الرتبة الثالثة وليست عامة مثل الطريقة الاعتيادية ، ولتوضيح طريقة (قاعدة) ساروس ، ففيها يتم إضافة نفس العمود الأول ، والعمود الثاني إلى المحددة ذات الثلاثة الأعمدة ، ثم نُوصل كل ثلاثة عناصر بخط ينتهي بسهم ، فالخطوط التي تنحدر بنفس اتجاه القطر الرئيس تكون موجبة ، والخطوط التي تنحدر بنفس اتجاه القطر الثانوي تكون سالبة ، ويتم ضرب العناصر التي تمر بها الخطوط ببعضها ، ويتم تجميع النواتج مع مراعاة الإشارة ، ويكون الناتج في النهاية هو محصلة فك المحددة ، وهي تكافئ نفس النتيجة في حالة استخدام الطريقة المعتادة .

وللمحددة خواص مهمة يمكن تلخيصها بالآتي :

١ – إذا تَساوى، أو تناسب صفان (أو عمودان) في مصفوفة مربعة كانت محددتها صفراً .

٢ – إذا تبادل صفان (أو عمودان) موقعيهما في مصفوفة مربعة ، فإن قيمة المحددة تتغير من الموجب إلى السالب ، أو العكس .

٣ – لاتتغير قيمة المحددة إذا جعلنا صفوفها أعمدة ، وأعمدتها صفوف ، أي أن :

$|أ| = |أ^{ك}|$.

http://e-learning-moe.edu.ye

٤ – إذا ضُرب كل عنصر من صف (أو عمود) مـــن محددة بعدد حقيقـي ، وليكن ك ، فكأن ناتج المحددة قد ضرب بهذا العدد .

٥ – إذا تناسب عناصر صفين ، أو عمودين في محـددة ، فإن قيمتها تسـاوي صفـراً . ويُقصد بالتناسب هنا أن يكون صف من الصفوف ضعف صف آخر ، أو ضعف عمود آخر ، أو نصفه .. وهكذا ينطبق على الأعمدة في المصفوفة .

٦ – إذا أُضيفت عناصر صف، أو عمود من محددة إلى عناصر صـف ، أو إلى عمود آخر لنفس المحددة ، لاتتغير قيمتها .

٧ – محددة المصفوفة المثلثية تساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيس .

ملاحظة : أن كل خاصية من الخواص السابقة قد وضحت بمثال (لاحظ كتاب الطالب) .

رابعاً : حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى :

تم في هذا البند تجزءة هذا الموضوع إلى نوعين من المعادلات هما :

١ – معادلات من الدرجة الأولى في متغيرين .

٢ – معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات .

وقد أُتُبِعتْ الخطوات الآتية لحل هذا النظام من المعادلات من خلال المحددات :

١ – يُرتب النظام الخطي من المعادلات على هيئة مصفوفات (ثلاث مصفوفات) ، اثنتين من اليمين مضروبة ببعضها ، الأولى تُسمى مصفوفة المعاملات ، والثانية تسمى مصفوفة المجاهيل، أمَّا الثالثة، والتي تقع في يسار المساواة ، فتُسمى مصفوفة الثوابت .

٢ – نُوجد محددة مصفوفة المعاملات ، والتي نرمز لها بالرمز Δ (ويُقرأ دلتا) ، وهو رمز يوناني (لاتيني) ، ثم نفك المحددة لإيجاد ناتجها .

٣ – نُوجد قيمة Δ س ، وذلك باستبدال عناصر العمود الأول في محددة مصفوفة المعاملات بعناصر مصفوفة الثوابت ، ثم نفك المحددة بالطريقة المعتادة ، أو باستخدام قاعدة ساروس في حالة المحددة الثلاثية .

٤ – نُوجد قيمة Δ ص ، وذلك باستخدام عناصر العمود الثاني في محددة مصفوفة المعاملات بعناصر مصفوفة الثوابت ، وإيجاد ناتج المحددة .

٥ – نُوجد قيم كل من س ، ص ، والتي تُمثل المتغيرات التي نعمل على إيجاد قيمتها في النظام ، بحيث يكون : $س = \frac{\Delta س}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

٦ – أمَّا في حالة ثلاثة متغيرات ، فنتبع نفس الخطوات السابقة ، ونجد قيمة المتغير الثالث ع بحيث يكون ع = $\frac{\Delta ع}{\Delta}$.

٧ – يُفضل استخدام قاعدة ساروس لإيجاد ناتج محددة المصفوفة الثلاثية ذات الرتبة (٣ × ٣) لتسهيل عملية إيجاد النواتج .

١ – ٣ المصفوفات

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١– يتعرف النظام المكون للمصفوفة .

٢– يطبق شروط تساوي مصفوفتين .

٣– يمثل بعض الأنظمة العددية بمصفوفات .

٤– يتعرف بعض أنواع المصفوفات .

تنفيذ البند :

يُنفذ البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المصفوفات .

الحصة الثانية : أنواع المصفوفات .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الثالثة يعطى التمرين التالي :

مثِّل جدول الحصص الأسبوعي لصفك كمصفوفة والمطلوب :

١ – عدد الصفوف والأعمدة المكونة للمصفوفة .

٢ – سمي المصفوفة س ، وأوجد عدد عناصرها .

٣ – ماذا تعني س$_{٥٣}$ ، س$_{٣٣}$ ، س$_{٣٥}$ ؟ وما الفرق بين س$_{٥٣}$ ، س$_{٣٥}$ ؟

http://e-learning-moe.edu.ye

إرشادات وحلول : تمارين (٣ – ١)

[١] أ) جدول يُبين المسافات بين مدن : صنعاء – ذمار – إب – تعز .

المدينة	صنعاء	ذمار	إب	تعز
صنعاء	٠	١٠٠	١٩٣	٢٦٠
ذمار	١٠٠	٠	٩٣	١٦٠
إب	١٩٣	٩٣	٠	٦٧
تعز	٢٦٠	١٦٠	٦٧	٠

ب) $ص = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠٠ & ١٩٣ & ٢٦٠ \\ ١٠٠ & ٠ & ٩٣ & ١٦٠ \\ ١٩٣ & ٩٣ & ٠ & ٦٧ \\ ٢٦٠ & ١٦٠ & ٦٧ & ٠ \end{bmatrix}$

١) ١٩٣ ، ونعني به العنصر الذي يقع في الصف الأول ، والعمود الثالث .

٢) ١٩٣ ، ونعني به العنصر الذي يقع في الصف الثالث والعمود الأول .

٣) الفرق بينهما واضح في ١ ، ٢ .

٤) ١٩٣ ، ٩٣ ، ٦٧ .

٥) ١٩٣ ، ٩٣ ، ٦٧ .

٦) نستنتج أن الصف الثالث يساوي العمود الثالث ، وإذا أمعنا النظر نجد أن كل صف يساوي ما يناظره في الأعمدة .

٧) عناصر القطر الرئيس في المصفوفة هي(٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠) عناصر كلها أصفار .

[٣] من تعريف تساوي مصفوفتين : س = ٣ ، ص = ٤ .

[٤] من تعريف تساوي مصفوفتين : ٢٤ ع = ٤ $\Leftarrow$ ع = $\frac{١}{٣}$ ـــ (١)

١٢ جـ = ٤٨ $\Leftarrow$ جـ = ٤ ـــ (٢)

http://e-learning-moe.edu.ye

٢ ع + د = ٨ ⇐ ٢ × $\frac{١}{٦}$ + د = ٨ ⇐ د = ٨ − $\frac{١}{٣}$ = ٧ $\frac{٢}{٣}$ ـــ (٣)

٣ ل − جـ = ٦ ⇐ ٣ ل = ٦ + ٤ ⇐ ل = $\frac{١٠}{٣}$.

∴ ع = $\frac{١}{٦}$ ، جـ = ٤ ، د = ٧ $\frac{١}{٣}$ ، ل = $\frac{١٠}{٣}$.

[٥] أ) ص = $\begin{bmatrix} ا & ب & جـ \\ ا' & ب' & جـ' \\ ا'' & ب'' & جـ'' \end{bmatrix}$ ، ب) س = $\begin{bmatrix} ا & ب & جـ \\ & & \\ ا' & ب' & جـ' \end{bmatrix}$

وهي من الرتبة (٣ × ٣) .

جـ) عناصر العمود الأول هي : ا ، ا' ، ا'' عناصر العمود الثالث هي : جـ ، جـ' ، جـ''.

د) العناصر ا' ، جـ ، ا'' .

[٦] و = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & \cdots & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & \cdots & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & \cdots & ٠ & ٠ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ١ & ٠ & ٠ & \cdots & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وتسمى هذه المصفوفة مصفوفة الوحدة من الرتبة (ن × ن) .

و = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، س = $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}$ (العناصر اختيارية)

عناصر المصفوفة س هي (٢ ، −٣ ، ٤ ، ٥) .

http://e-learning-moe.edu.ye

٣ - ٢ العمليـات على المصفـوفـات

عدد الحصص : (٦) حصص .

الأهداف :

١- يوجد مجموع مصفوفتين .
٢- يوجد الفرق بين مصفوفتين .
٣- يضرب عدد حقيقي في مصفوفة .
٤- يجري العمليات الحسابية على المصفوفات .
٥- يضرب مصفوفة في أخرى ، أو أكثر .
٦- يتعرف على خواص ضرب المصفوفات .
٧- يتعرف على المصفوفة المدورة ، وادراك العمليات المرتبطة بها .

تنفيذ البند :

يُنفذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : جمع المصفوفات .
الحصة الثانية : طرح المصفوفات .
الحصتان الثالثة والرابعة : ضرب المصفوفات .
الحصة الخامسة : مدور المصفوفة .
الحصة السادسة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى التمرين التالي :

لتكن لدينا المصفوفتين :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ & ٥ \\ -١ & ٢ & -٣ & ٠ \\ ١ & ٦ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -١ & -٢ & ٧ \end{bmatrix} ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

http://e-learning-moe.edu.ye

والمطلوب :

١ – ما نوع المصفوفتين أ ، ب ؟

٢ – أوجد ما يلي : أ + ب ، ب + أ ، أ – ب ، أ ب ، ب أ ، ب أ ب .

إرشادات وحلول : تمارين (٣ – ٢)

[١] أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١- & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٨ & ١ \end{bmatrix}$

ب) الجمع مستحيل لأن المصفوفتين مختلفتين في عدد الأعمدة .

جـ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٥} & ٣- & ٤ \\ ٠ & ٥- & \frac{١}{٤} & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥- & \frac{٣}{٦} & ١- \\ ٢ & ٠ & ٢- & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & \frac{١٥-}{٦} & \frac{٢٣-}{٥} & \frac{٧}{٢} \\ ٤- & \frac{٧-}{٤} & ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} أ + ١ & ب - ١ & جـ + ١ \\ د - ١ & هـ + ١ & و - ١ \end{bmatrix}$

ط) $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤- & ٥- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ١- \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

[٢] ١) $ل + ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١- & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ ـــ (١)

$ب + ل = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١- & ٤ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ ـــ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ + ب = ب + أ .

http://e-learning-moe.edu.ye

٢) أولاً : نوجد (أ + ب) + جـ = $\begin{bmatrix} -٥ & -١ \\ ٦ & ٠ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$ ـــــ (٣)

ثانياً : نُوجد ب + جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & -١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

ثالثاً : نُوجد قيمة أ + (ب + جـ) = $\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ ٦ & ٠ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$ ـــــ (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن : (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ، ونستنتج من خلال الفقرة (١) بأن عملية جمع المصفوفات تحقق الخاصية التبديلية ، ومن خلال الفقرة (٢) بأن عملية الجمع على المصفوفات تحقق الخاصية التجميعية .

[٣] ١) أ + ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ١٠ & ٩ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ٨ \end{bmatrix}$ ، أ − ب = $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -١٥ & -٤ \\ -٢ & -١٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ـ (١)

ب − أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ & -٢ \\ ٢ & ١٥ & ٤ \\ ٢ & ١٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ـــــ (٢)

[٤] ∵ جـ + ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

∴ جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ − ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} ٠+١ & ٠+٤ \\ ٠+٢ & ٠+٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

http://e-learning-moe.edu.ye

[٥] ∵ س + أ = ب

$$\therefore \text{س} = \text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١- & ٤ \\ ٢ & ٨ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ١ & ٤- \\ ٢- & ٨- & ٩- \end{bmatrix}$$

[٦] أ) $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٧٥ & ٣٠ \\ ٦٠- & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٩ & ٦- \end{bmatrix}$ عندما ك = ٥ .

ب) $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٤- & ٠ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ عندما ك = $\frac{١}{٣}$.

جـ) $\text{ب} = \begin{bmatrix} \sqrt{٢٧} (٣) & \sqrt{٢٧} (١٥) & \sqrt{٢٧} (٦) \\ -\sqrt{٢٧} (١٢) & \sqrt{٢٧} (٠) & \sqrt{٢٧} (٣) \\ \sqrt{٢٧} (٠) & \sqrt{٢٧} (٩) & -\sqrt{٢٧} (٦) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{٢٧}٣ & \sqrt{٢٧}١٥ & \sqrt{٢٧}٦ \\ -\sqrt{٢٧}١٢ & ٠ & \sqrt{٢٧}٣ \\ ٠ & \sqrt{٢٧}٩ & -\sqrt{٢٧}٦ \end{bmatrix}$

عندما ك = $\sqrt{٢٧}$.

[٧] أ) $٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٢ \\ ٦- & ٠ \\ ٩ & ٩- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١٢ & ٤- \\ ١٦ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣- \\ ٤ & ١٨- \\ ١٧- & ٧- \end{bmatrix}$

أما س + ٢ ص يمكن إيجادها بنفس الطريقة السابقة .

ب) ٢ جـ ،

١٥ د ،

$$٤\text{د} - ٢\text{جـ} = ٤ \begin{bmatrix} ٣ \\ ١- \\ ٢ \end{bmatrix} - ٢ \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١- \\ ٣- & ١- & ٠ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٤- \\ ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ١٠ & ٢- \\ ٦- & ٢- & ٠ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

ولايمكن إجراء الطرح لاختلاف عدد صفوف المصفوفتين واختلاف عدد الأعمدة فيها . .

http://e-learning-moe.edu.ye

جـ) $3\underline{س} + \frac{1}{2}\underline{ص} - 2\underline{د} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 9 & -3 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ 8 & -3 \\ \frac{27}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$ ، ولايمكن طرح المصفوفتين لعدم التساوي .

[٨] تكوين المصفوفات اختياري ، ولهذا تترك للمعلم .

[٩] ١) $\underline{أ} \cdot \underline{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+12 & -1-4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

٢) $\underline{ب} \cdot \underline{جـ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

٥) $(\underline{أ} \cdot \underline{ب}) \cdot \underline{جـ} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 27 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

٦) $\underline{أ} \cdot (\underline{ب} \cdot \underline{جـ}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 27 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

٧) نستنتج من٧، ٨ أن : $(\underline{أ} \cdot \underline{ب}) \cdot \underline{جـ} = \underline{أ} \cdot (\underline{ب} \cdot \underline{جـ})$ تحقق العملية التجميعية .

[١٠] أ) $\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$(\underline{أ} - \underline{ب})^{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — (١)

$\underline{أ}^{2} = \underline{أ} \cdot \underline{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\underline{ب}^{٢} = \underline{ب} \bullet \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$٢\underline{أ} \bullet \underline{ب} = ٢ \left(\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \right) = ٢ \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{٢} - ٢\underline{أ}\underline{ب} + \underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \quad \text{—— (٢)}$$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(\underline{أ} - \underline{ب})^{٢} = \underline{أ}^{٢} - ٢\underline{أ}\underline{ب} + \underline{ب}^{٢}$.

ب) $\underline{أ}^{٢} - \underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix}$ —— (٣)

$$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(\underline{أ} + \underline{ب})(\underline{أ} - \underline{ب}) = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix} \quad \text{—— (٤)}$$

من (٣) ، (٤) ينتج أن : $\underline{أ}^{٢} - \underline{ب}^{٢} = (\underline{أ} + \underline{ب})(\underline{أ} - \underline{ب})$

[١١] أ) [٣]

ب) لايمكن إجراء عملية الضرب لعدم تحقق شرط ضرب المصفوفة .

جـ) لايمكن إجراء عملية الضرب لعدم تحقق شرط ضرب المصفوفة .

http://e-learning-moe.edu.ye

[١٢] ١) $\underline{أ}^{-١} \bullet \underline{أ}$

$$= \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & -١ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ٢ & ١ \\ -١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١ + ٢ - ٢ & -٢ + ٤ - ٢ & -١ + ٢ + ٠ \\ -١ - ٢ + ١ & -٢ - ٤ + ٢ & -١ - ٢ + ٠ \\ ٠ + ١ - ١ & ٠ + ٢ - ٢ & ٠ + ١ - ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$ ـــــ (١)

$\underline{ب} \bullet \underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} -٣ & -٦ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & -٦ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +٩ - ١٢ + ٤ & ١٨ - ٢٤ + ٦ & -٦ + ٦ + ٠ \\ -٦ + ٨ - ٢ & ١٢ + ١٦ - ٣ & ٤ - ٤ + ٠ \\ -٦ + ٦ + ٠ & -١٢ + ١٢ + ٠ & ٤ - ٣ + ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$ ـــــ (٢)

$\underline{جـ} \bullet \underline{جـ}$

$$= \begin{bmatrix} -٥ & -٨ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥ & -٨ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٥ - ٢٤ & ٤٠ - ٤٠ & ٠ \\ -١٥ + ١٥ & -٢٤ + ٢٥ & ٠ \\ -٥ + ٦ - ١ & ٨ - ١٠ + ٢ - & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$ ـــــ (٣)

http://e-learning-moe.edu.ye

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : $أ^{٢} = ب^{٢} = جـ^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٢) $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٣ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ -١ & -١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٣ - ٤ - ٤ & ٦ - ٨ - ٦ & -٢ + ٢ + ٠ \\ -٣ + ٤ + ٢ & ٦ + ٨ + ٣ & -٢ + ٢ - ٠ \\ ٣ - ٢ + ٠ & -٦ + ٤ + ٠ & -٢ + ١ + ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٥ & -٨ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ـــــ (١)

$ب \cdot أ = \begin{bmatrix} -٣ & -٦ & ٢ \\ ٢ & ٤ & -١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٢ \\ ١ & ٢ & ١ \\ -١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٣ - ٦ - ٥ & ٦ - ١٢ - ٢ & ٠ + ٦ - ٦ \\ -٢ + ٤ + ١ & -٤ + ٨ + ١ & ٠ + ٤ + ٤ - \\ -٢ + ٣ + ٠ & -٤ + ٦ + ٠ & ٠ + ٣ + ٤ - \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -٥ & -٣ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ـــــ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $أ \cdot ب = ب \cdot أ = جـ$.

ونحل البقية بنفس الطريقة .

http://e-learning-moe.edu.ye

[١٣] ∵ $\underline{أ}^{٢} + ٢\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ث}$ ، ∴ $\underline{ب} = -\underline{أ}^{٢} - ٢\underline{أ} + \underline{ث}$.

$$-\underline{أ}^{٢} = -\underline{أ} \bullet \underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٥ \\ ١٠ & ٢٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & -١٥ \\ -١٠ & -٢٢ \end{bmatrix}$$

$$-٢\underline{أ} = -٢\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -٦ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٧ & -١٥ \\ -١٠ & -٢٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -٦ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٩ & -٢١ \\ -١٤ & -٣٠ \end{bmatrix}$$

[١٤] ١) $\underline{أ}$ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب}$ $= \begin{bmatrix} ١ & \\ ٥ & \end{bmatrix}$

٢) $\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٧ & ١١ \end{bmatrix}$

$(\underline{أ} + \underline{ب})^{-١} = \begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ -٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ——— (١)

٣) $\underline{أ}^{-١} + \underline{ب}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ ——— (٢)

٤) من خلال المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن : $(\underline{أ} + \underline{ب})^{-١} = \underline{أ}^{-١} + \underline{ب}^{-١}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

٣ - ٣ المحـــــددات

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف :

١- يتعـرف فك محددة (مصفوفة) من الرتبــة الثانيـة والثالثة على الأكثر .

٢- يطبق خواص المحددات .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : المحددات وطرق نشرها .

الحصة الثالثة : خواص المحددة مع حل تمارين صفِّيَّة.

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

فك المحدة التالية باستخدام الطريقة المناسبة : $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ١ & ١- \\ ٢ & ٣ & ٥ & ٠ \\ ٢- & ١ & ٣- & ١- \\ ٤ & ٦ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$

إرشادات وحلول : تمارين (٣ - ٣)

[١] أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$ = (٣ × ٥ - (٢-) × ٤) = (١٥ + ٨) = ٢٣ ، وتم ذلك بضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه عنصر القطر الثانوي .

ب) $\begin{vmatrix} ١- & ٦ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ = (٤- - ٠) = ٤-

http://e-learning-moe.edu.ye

د) نفس طريقة حل (جـ) ، وكذلك هـ ، و .

جـ) $\begin{vmatrix} أ-ب & ب \\ ب & أ+ب \end{vmatrix}$ = [(أ – ب)(أ + ب) – ب × ب]

= ($أ^{٢}$ – $ب^{٢}$ – $ب^{٢}$) = $أ^{٢}$ – $ب^{٢}$.

[٢] قيمة (م) التي تجعل قيمة |أ| تساوي صفر هي م = ٢ ونتحقق كالتالي :

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٦ & -١ \\ ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ٨ = صفر$$

[٣] أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ – ٢ $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ + (٠) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix}$

= ١ (٢ – ١٥) –٢(–٢ –١٥) + (٠) (٦ + ٦)

= ١ × (–١٣) + ٢ × ١٧ + (٠) × ١٢ = – ١٣ + ٣٤ + ٠ = ٢١

وتحل الفقرات ب ، جـ كما في (أ) .

[٤] $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$ = ٧ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ – ٨ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix}$ + ٩ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٧ (١٢ – ٥) –٨ (٦ – ١٢) + ٩ (٥ – ٨)

= – ٢١ + ٤٨ – ٢٧ = صفر .

وعند استخدام العمود الثاني كعوامل لفك المحددة ، فيكون :

$$|أ| = ٢ \begin{vmatrix} ٤ & ٦ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix} - ٨ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

= –٢ (٣٦ – ٤٢) + ٥ (٩ – ٢١) – ٨ (٦ – ١٢)

= ١٢ – ٦٠ + ٤٨ = صفر .

يلاحظ أن ناتج فك المحددة متساوي في الحالتين .

http://e-learning-moe.edu.ye

ب) وعندما نبادل بين الصفين الأول والثاني تصبح شكل المحدد |أ| هي :

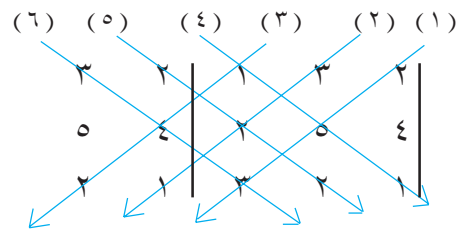
$$|أ| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{vmatrix}$$ ، ثم نختار العمود الثالث لفك المحددة ، فتكون قيمة المحددة هي :

$$|أ| = ٦ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٨ & ٧ \end{vmatrix} + ٩ \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

= ٦ (٨ – ١٤) – ٣ (٣٢ – ٣٥) + ٩ (٨ – ٥) = – ٣٦ + ٩ – ٢٧ = صفر .

لاحظ أنه عندما بادلنا بين الصفين ظلت قيمة المحددة مساوية للصفر .

[٥] لفك المحددة باستخدام قاعدة ساروس .

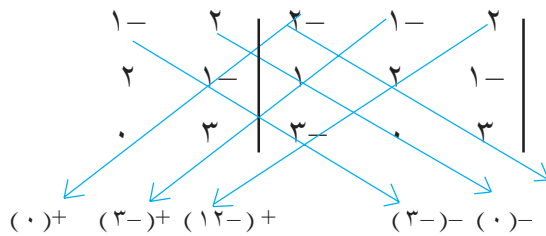


ولتوضيح هذه الطريقة نضرب العناصر التي يمر بها السهم في بعضها بحيث أن الأسهم (١) ، (٢) ، (٣) يكون ناتج حاصل الضرب موجب باستثناء أن تشمل العناصر إشارات سالبة والأسهم (٤) ، (٥) ، (٦) يكون ناتج حاصل الضرب سالب ، إلاَّ إذا دخلت إشارات (إشارات سالبة) تغير من هذه النتيجة عندئذ يكون ناتج فك هذه المحددة هو :

ناتج حاصل ضرب عناصر السهم الأول + ناتج حاصل ضرب عناصر السهم الثاني + ناتج حاصل ضرب عناصر السهم الثالث ، مطروحاً منها ناتج حاصل ضرب عناصر السهم الرابع + ناتج حاصل ضرب عناصر السهم الخامس + ناتج حاصل ضرب عناصر السهم السادس = + (٢ × ٥ × ٣) + (٣ × ٢ × ١) + (١ × ٤ × ٢) – (١ × ٥ × ١) – (٢ × ٢ × ٢) – (٣ × ٤ × ٣) = (٣٠ + ٦ + ٨) – (٥ + ٨ + ٣٦) = ٤٤ – ٤٩ = – ٥

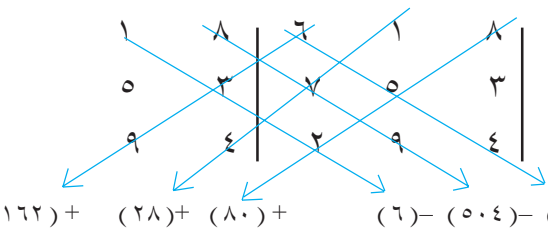
http://e-learning-moe.edu.ye

ب)



$= (-١٢ - ٣ + ٠) - (-١٢ - ٠ - ٣-) = (-١٥) - (-١٥) =$ صفر .

جـ)



$= +(٨٠ + ٢٨ + ٦٢) - (١٢٠ + ٥٠٤ + ٦) = -٤٦٠$.

[٦] $|أ| =$ صفر ، لأن عناصر الصف الثاني هي عبارة عن حاصل جمع الصف الأول مع الصف الثالث ، وبالتالي يكون هناك تطابق في المحددة – مبنية في الخاصية الأولى من خواص المحددات – فتكون قيمة المحددة مساوية للصفر .

$|ب| =$ صفر ، لأنه يوجد تناسب بين الصفين الأول والثالث ، أي أن عناصر الصف الثالث ضعف عناصر الصف الأول بحسب الخاصية الخامسة من خواص المحددات – فإن قيمة المحددة تساوي صفر في هذه الحالة .

[٧] ∵ المحددة $|أ| =$ صفر ، فمن الخاصية الأولى ، فإن عناصر الصفين الأول والثاني تكون متطابقة (متساوية) ، أي أن : س = ٥ .

∵ المحددة $|ب| =$ صفر ، وذلك بسبب أن العمود الثاني نصف العمود الثالث (الخاصية الخامسة) ؛ لذا تكون قيمة س هي : س = ١ .

[٨] $|أ| = \begin{vmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \\ ٤ & ٢- & ٢ \end{vmatrix} = -٥ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٢ \end{vmatrix} + (٠) \begin{vmatrix} ١ & ٣- \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ٢- & ٤ \end{vmatrix}$

$= -٣٠ + ٠ + ٨ = -٢٢$.

http://e-learning-moe.edu.ye

لاحظ أننا استخدمنا الصف الثاني ، لكي نسهل عملية النشر بسبب وجود الصفر في هذا الصف ، مع الانتباه للإشارة حيث أن المعامل (٥) أخذ الإشارة السالبة .

| ب | = صفر ، لأن الصفين الأول والثاني متطابقان .

| جـ | ≠ صفر لماذا ؟

٣ - ٤ حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف :

١- يحل معادلات الدرجة الأولى في متغيرين، أو ثلاثة متغيرات على الأكثر باستخدام المحددات .

٢- يقارن عدد الحلول للمعادلات مع عدد المتغيرات .

٣- يطبق خواص المحددات على المعادلات ، ويستخدمها عند فك مصفوفات المحددات لتلك المعادلات .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية: حل نظام معادلتين بمتغيرين من الدرجة الأولى .

الحصتان الثالثة والرابعة: حل نظام ثلاث معادلات من الدرجة الأولى بثلاث متغيرات

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى التمرين التالي :

أوجد قيمة المتغيرات س ، ص ، ع باستخدام المحددات :

٢ ص - ٤ ع = ٥

٢ س + ص + ٥ ع = ٢

٤ س + ٢ ص = ٤

http://e-learning-moe.edu.ye

إرشادات وحلول : تمارين (٣ - ٤)

[١] حل المعادلتين كما يلي :

أ) ٢ س + ص = ٧ ـــ (١)

٣س - ٥ص = ٤ ـــ (٢)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad \text{ـــ (٣)}$$

أي أن هذ النظام يتكون من معادلتين ومجهولين هما : س ، ص .

ثانياً : نجد قيمة Δ التي تمثل المصفوفة في الطرف الأيمن للمعادلة (٣) ، والتي تسمى معاملات المصفوفة .

$$\text{أي أن } \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = (-١٠ - ٣) = -١٣$$

ثالثاً : نجد قيمة Δ س ، وذلك بتبديل العمود الأول من مصفوفة المعاملات بمصفوفة الثوابت الموجودة في الطرف الأيسر للمعادلة (٣) .

$$\text{أي أن } \Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣٥ - ٤) = -٣٩$$

رابعاً : نجد قيمة Δ ص ، وذلك بتبديل العمود الثاني من مصفوفة المعاملات بمصفوفة الثوابت .

$$\text{بحيث أن } \Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (٨ - ٢١) = -١٣$$

خامساً : نوجد قيمة كل من س ، ص ، على النحو التالي :

$$\text{س} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta} = \frac{-٣٩}{-١٣} = ٣$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta} = \frac{-١٣}{-١٣} = ١$$

http://e-learning-moe.edu.ye

سادساً : نعوض عن قيمة س ، ص التي حصلنا عليها من المعادلة (١)، أو المعادلة (٢) سنجد أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر لكلتا المعادلتين .

ب) ٣ س + ٥ ص = ٨

٤ س – ٢ ص = ١

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = (-٦ - ٢٠) = -٢٦$$

$$\Delta\ س = \begin{vmatrix} ٨ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = (-١٦ - ٥) = -٢١$$

$$\Delta\ ص = \begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = (٣ - ٣٢) = -٢٩$$

$$س = \frac{\Delta\ س}{\Delta} = \frac{-٢١}{-٢٦} \quad . \quad ص = \frac{\Delta\ ص}{\Delta} = \frac{-٢٩}{-٢٦} \quad .$$

جـ) ٢ س – ٣ ص = –١

٤ س + ٧ ص = –١

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ -١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix} = (١٤ + ١٢) = ٢٦$$

وأن : $\Delta\ س = \begin{vmatrix} -١ & -٣ \\ -١ & ٧ \end{vmatrix} = (-٧ - ٣) = -١٠$

$$\Delta\ ص = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = (-٢ + ٤) = ٢$$

http://e-learning-moe.edu.ye

∴ س = $\frac{\Delta \text{ س}}{\Delta}$ = $\frac{-١٠}{-٢٦}$ = $\frac{-٥}{١٣}$. ص = $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta}$ = $\frac{٢}{٢٦}$ = $\frac{١}{١٣}$.

د) ٥س – ٢ ص = –٧

٤ س – ٣ ص = –٤

$$\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} = (-١٥ + ٨) = -٧ \quad \therefore$$

$$\Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} -٧ & -٢ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = (٢١ - ٨) = ١٣$$

$$\Delta \text{ ص} = \begin{vmatrix} ٥ & -٧ \\ ٤ & -٤ \end{vmatrix} = (-٢٠ + ٢٨) = ٨$$

$$\text{س} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta} = \frac{-١٣}{٧} \quad .$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta} = \frac{٨}{-٧} \quad .$$

هـ) ا س – ٢ ب ص = جـ

٣ا س – ٥ ب ص = ٢ جـ .

$$\therefore \begin{bmatrix} ا & -٢ب \\ ٣ا & -٥ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} جـ \\ ٢ جـ \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ا & -٢ب \\ ٣ا & -٥ب \end{vmatrix} = (-٥ا ب + ٦ ا ب) = ا ب \quad .$$

$$\Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} جـ & -٢ ب \\ ٢ جـ & -٥ ب \end{vmatrix} = (-٥ ب جـ + ٤ ب جـ) = - ب جـ$$

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\Delta \text{ ص} = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ أ٣ & ٢ جـ \end{vmatrix} = (٢ أ جـ - ٣ أ جـ) = - أ جـ .$$

$$\text{س} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta} = \frac{- ب جـ}{أ ب} = \frac{- جـ}{أ} .$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta} = \frac{- ب جـ}{أ ب} = \frac{- جـ}{أ} .$$

التحقيق :

نعوض عن قيمة كل من س ، ص في الطرف الأيمن للمعادلة (١) .

$أ \left(\frac{- جـ}{أ}\right) = -٢ ب \left(\frac{- جـ}{ب}\right) - جـ + ٢ جـ = جـ$ ، وهذا يساوي الطرف الأيسر للمعادلة (١)

أما إذا عوضنا عن قيمة كل من س ، ص في الطرف الأيمن للمعادلة (٢) فتكون :

$٣ أ \left(\frac{- جـ}{أ}\right) = -٥ ب \left(\frac{- جـ}{ب}\right) = -٣ جـ + ٥ جـ = ٢ جـ$ ، وهذا يساوى الطرف الأيسر من المعادلة (٢)

[٢] :

أ) أولاً : نرتب المعادلات إذا كانت بحاجة إلى ذلك .

$٢ س - ٥ ص + ٢ ع = ٧$ ـــــ (١)

$س + ٢ ص - ٤ ع = ٣$ ـــــ (٢)

$٣ س - ٤ ص - ٦ ع = ٥$ ـــــ (٣)

ثانياً : نعيد كتابة هذا النظام (مجموعة المعادلات) على هيئة مصفوفات كما يلي :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ٣ & -٤ & -٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} \quad \text{ـــــ (٤)}$$

ثالثاً : نوجد قيمة Δ والذي يمثل محددة مصفوفة المعاملات .

http://e-learning-moe.edu.ye

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٥- & ٢ \\ ١ & ٢ & ٤- \\ ٣ & ٤- & ٦- \end{vmatrix}$ ، وهنا نستخدم الطريقة المعتادة ، أو طريقة ساروس لنشر المحددة .

$$\Delta = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٤- & ٦- \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ٤- & ١ \\ ٦- & ٣ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤- \end{vmatrix}$$

$$= ٢ (-١٢ - ١٦) + ٥ (-٦ + ١٢) + ٢ (-٤ - ٦)$$

$$= -٥٦ + ٣٠ - ٢٠ = -٤٦$$

رابعاً : نجد قيمة Δ س ، كما يلي :

$$\Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} ٧ & ٥- & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٤- \\ ٥ & ٤- & ٦- \end{vmatrix}$$

$$= ٧ (-١٢ - ١٦) + ٥ (-١٨ + ٢٠) + ٢ (-١٢ - ١٠)$$

$$= -١٩٦ + ١٠ - ٤٤ = -٢٣٠ .$$

$$\Delta \text{ ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٤- \\ ٣ & ٥ & ٦- \end{vmatrix}$$

$$= ٢ (-١٨ + ٢٠) - ٧ (-٦ + ١٢) + ٢ (٥ - ٩)$$

$$= ٤ - ٤٢ - ٨ = -٤٦ .$$

$$\text{س} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta} = \frac{-٢٣٠}{-٤٦} = ٥ .$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta} = \frac{-٤٦}{-٤٦} = ١ .$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta \text{ ع}}{\Delta} = \frac{-٤٦}{-٤٦} = ١ .$$

http://e-learning-moe.edu.ye

التحقيق :

نعوض عن قيم س ، ص، ع ، في المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) فيكون :

بأخذ المعادلة (١) ونعوض في الطرف الأيمن عن قيمة س = ٥ ، ص = ١ ، ع = ١ فيكون : ٢ × ٥ – ٥ × ١ + ١ × ٢ = ١٠ – ٥ + ٢ = ١٢ – ٥ = ٧ أي أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر .

وبالمثل نأخذ المعادلة (٢) فيكون : ٥ + ٢ × ١ – ١ × ٤ = ٧ – ٤ = ٣ أي أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر .

وكذلك المعادلة (٣) : ٣ × ٥ – ٤ × ١ – ٦ × ١ = ١٥ – ٤ – ٦ = ٥ أي أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر .

ب)
$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ \\ ٧ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

استخدمنا قاعد ساروس لنشر المحددة الثلاثة .

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

= (١ + ٢٠ – ٢٧) – (١٥ + ٦ – ٦) = – ٦ – (١٥) = – ٢١ .

$$\Delta \text{ س} = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ & -٣ \\ ٧ & -١ & ٢ \\ ٨ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

= + (– ٤ + ٣٢ – ٦٣) – (٢٤ – ٢٤ – ١٤) = – ٣٥ + ١٤ = – ٢١

$$\Delta \text{ ص} = \begin{vmatrix} ١ & -٤ & -٣ \\ ٣ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٨ & -١ \end{vmatrix}$$

= (– ٧ – ٤٠ – ٧٢) – (– ١٠٥ + ١٦ + ١٢) = (– ١١٩ + ٧٧) = – ٤٢

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٤- & ١ & ٢ \\ ٣ & ١- & ٧ & ٣ & ١- \\ ٥ & ٣ & ٨ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= (٨- + ٧٠ - ٣٦) - (٢٠ + ٢١ + ٤٨) = (٢٦ - ٨٩) = ٦٣-$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٢١-}{٢١-} = ١$$

$$ص = \frac{٤٢-}{٢١-} = ٢ \quad ، \quad ع = \frac{٦٣-}{٢١-} = ٣$$

جـ)
$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٨ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١- \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٢- & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١- & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٥ & ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- & ٣- & ١ & ٢- \end{vmatrix}$$

$$= (٤٥- + ٤ + ٦) - (٥- - ١٢- - ١٨) = ٣٥- + ٣٥ = ٠$$

$$\Delta = ٠$$

∴ لايوجد حل وحيد للمعادلة ، وبالتالي توجد كثير من الحلول لهذا النظام .

∴ نتوقف عن الحل .

د)
$$\begin{bmatrix} ٣- \\ ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢- \\ ٣ & ٢- & ٣- \\ ٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إذا لم تحدد الطريقة التي يستخدمها الطالب لنشر المحددة ، فأية طريقة يستخدمها يكون هو بالاتجاه الصحيح . وهنا سنستخدم الطريقة الاعتيادية خلافاً لما سبق.

http://e-learning-moe.edu.ye

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢- \\ ١ & ٢- & ٣- \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢- \\ ٢- & ٣- \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ١ & ٣- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ١ & ٣- \end{vmatrix}$$

$= ٢(-٧) - ٣(-٧) + (-٧) = -١٤ + ٢١ - ٧ =$ صفر .

∵ Δ = صفر ، ∴ نتوقف عن الحل ، والسبب ذكر في الفقرة (جـ) .

٣ : ٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف :

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار :

ينفذ الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه له على أن يحقق أهداف الوحدة والموضحة في الجدول التالي :

رقم السؤال	أرقام الاهداف التي يقيسها
١	١ ، ٢ ، ٣ ، ٤
٢	٥ ، ٦
٣	٧

الاختبار :

[١] إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٤ \\ ٣ & -١ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٤ & -٢ & -١ \\ ٣ & ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

فأوجد ما يلي :

١) $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{ب} + \underline{أ}$ ، ٢) $\underline{ب} - \underline{أ}$ ، $\underline{أ} + \underline{ب}$

http://e-learning-moe.edu.ye

٣) $\underline{أ}\,\underline{ب}$ ، ٤) $٢\,\underline{أ}$ ، $\underline{أ}^{-١}$ ،

٥) ماذا تستنتج من (١) ، (٢) ؟

[٢] أوجد ناتج ما يلي :

١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٦ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$ ، $٢ \blacksquare |ب| = \begin{vmatrix} -٢ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

٣) $|جـ| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٥ \\ -٣ & ٢ & ٠ \\ ٤ & -٢ & ٢ \end{vmatrix}$

[٣] أوجد باستخدام المحددات قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ في النظام الآتي :

$٢ س_٣ + ٣ = س_٢ + ٣ س_١$.

$س_١ - ٣ س_٣ = ٢ س_٢ - ١$

$٣ س_٢ + س_٣ = ٢ - ٢ س_١$.

المصطلحات الواردة في الوحدة

تجميعي	Additive
إشارات	Assigns
المصفوفات الموسعة	Augmented matrix
عمود	Column
تبديلي	Commutative
شرط	Condition
تماثل (تناظر)	Corresponding , symetrical
محددات	Determinats
تعريف	Definition
مصفوفة قطرية	Diagonal Matrix
رتبة (من النوع م × ن)	Dimension

http://e-learning-moe.edu.ye

Difference	الفرق
Element	عنصر
Equal two matrices	تساوي مصفوفتين
Equation	معادلة
Equivalent	تكافؤ
Vector	متجه (عامل)
Homogeneous	متجانس
Matrix	مصفوفة
Matrrices	مصفوفات
Maltiply	ضرب
Rank	رتبة
Problems	مسائل
Properties	خواص
Solution	حل
Square Matrix	مصفوفة مربعة
Sign	إشارة
Symmetric Matrix	مصفوفة متماثلة
System	نظام
Transpose	مدور
Trivial solution	حل صفري
Triple Matrix	مصفوفة مثلثية
Unique solution	حل وحيد

المراجـــع : Refernces

أولاً : المصادر العربية :

- الحـــداد، هادي مجيد ، مبـــادئ الريـــاضيـــات، دار المريـــخ للنشر، الريـــاض، طبعة ١٩٩٧م .

ثانياً : المصادر الأجنبية :

1 - Ariora. P . N & Arora , S , Mathematics , Fifth Ed. 1999, India.

2 - Lipschutz , S . Finite Mathematics , Mcgraw - Hill Inc , 1980, Britin .

http://e-learning-moe.edu.ye

الوحدة الرابعة — المشتقات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٤ – ١	نهاية واتصال الدالة .	٢
٤ – ٢	المشتقات .	٢
٤ – ٣	قواعد إيجاد المشتقات .	٥
٤ – ٤	مسائل تطبيقية .	٢
٤ – ٥	اختبار الوحدة .	٢
	المجموع	١٣

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يتعرف نهاية الدالة .

٢ – يوجد نهاية الدالة .

٣ – يعرف الاتصال .

٤ – يدرس اتصال دالة معطى .

٥ – يعرف مشتقة الدالة .

٦ – يوجد مشتقة الدالة .

٧ – يوجد مشتقة الدالة الثابتة .

٨ – يوجد مشتقة الدالة : د(س) = س ^{ن} ، ن $\in$ ص .

٩ – يوجد مشتقة ثابت في دالة .

١٠ – يوجد مشتقة مجموع دالتين ، والفرق بينهما .

١١ – يوجد مشتقة حاصل ضرب دالتين ، وخارج قسمتهما .

١٢ – يحل مسائل تطبيقية على المشتقات .

http://e-learning-moe.edu.ye

المقدمة

تتكون هذه الوحدة من أربعة بنود ، أهمها البند الثالث الذي قد عرف قواعد الاشتقاق بدون برهنة وإعطاء عليها ما يكفى من الأمثلة ، وهذا هو الهدف الأساسي للوحدة في القسم الأدبي حيث يركز على أن يتقن الطالب استخدام قواعد الاشتقاق في إيجاد مشتقة أية دالة ، وبذلك فإن البندين الأولين هما مدخل لفهم فكرة الاشتقاق، والبند الرابع هو فكرة عن بعض التطبيقات المبسطة لموضوع الاشتقاق .

لمحة تأريخية

بقدر ما يعتبر التحليل الرياضي فرعاً من فروع الرياضيات ، إلاّ أنه نفسه يتكون من فروع من أهمها فرع « التفاضل » الذي تتناول هذه الوحدة أساسياته من الدالة النهاية ، والمشتقة .

ويعني التحليل الرياضي الكمية ، وبما يربط بين التغيرات المستقلة والتابعة .

تشير المراجع : إن فكرة التحليل الرياضي قد ظهرت عند قدماء الأغريق (أرخميدس) ٢٨٧–٢١٢ ق .م . إلاّ إن وضوحها بدأ على يد ابن حمزة المغربي (القرن العاشر الهجري)، وتابعة أبو الوفاء (٩٤٠ – ٩٩٨م) في الموضوع نفسه الذي استطاع اكتشاف بعض العلاقات الهامة بين الجيب والمماس تمهيداً لاكتشاف قواعد التفاضل والتكامل التي وضعها بصورتها الأولية شرف الدين الطوسى (١٢١٠م) والمشار إليها في كتاية (قواسم الحساب)، حيث قام بحل معادلات من الدرجة الثالثة أو أقل باستخدام القيم العظمى .

ويظهر من ذلك – وبعد انتقال حضارة العرب إلى الغرب – إنهم قد استفادوا من ذلك كثيراً حتى أنشأوا علم التفاضل والتكامل الذي قام بتعريفه بصورته الأولية الفرنسي باسكال (١٦٢٣ – ١٦٦٢م) دون تطبيق إلاّ إن اللذان اشتهرا باكتشاف هذا العلم هما الإنجليزي نيوتن (١٦٤٢ – ١٧٢٧م) والألماني لاينبتز (١٦٤٦ – ١٧١٦م) وهو الذي وضع له بعض الرموز .

ولازالت رياضيات القرن الثامن عشر تعني العدد والشكل دون التركيب ، ولهذا لازال التفاضل والتكامل لايعطى اهتماماً كافياً للتقارب والتباعد والنهايات والاتصال وماشابه ذلك .

http://e-learning-moe.edu.ye

ومع نهاية القرن الثامن عشر نما علم التفاضل والتكامل نمواً كبيراً وأخذت تطبيقاته تأخذ حيزاً واسعاً كما في الميكانيكا والفلك والمساحة .... الخ وهنا برز علماء آخرون أسهموا أسهامات واضحة في هذا العلم ، منهم :

- لاجراغ (١٧٣٦– ١٨١٣م) فرنسي إنجليزي الذي برز في حساب التغير وتطبيقات الدينمايكا .
- أويلـر (١٧٠٧ – ١٧٨٣م) (ألمانـي) وقـد قـدم التفاضل الجزئي وحسـاب التغير وتطبيقاته .
- لابلاس (١٧٤٩–٢٨١٧م) (فرنسي) وهو صاحب التحويلات المسماه باسمه والتي ساعدت في حساب التفاضل والتكامل باستخدام المعاملات .
- فيرستراس (١٨١٥ – ١٨٩٧م) (ألماني) الذي وضع الدوال ذات المتغيرات المركبة، كما قدم المعادلات التفاضلية .

وهناك آخرون قد أسهموا في تطور علم التفاضل والتكامل منهم : أرشميدس وكوشي وجاوس جالودويمان ، حتى استقر في صورته النهاية في القرن التاسع عشر بواسع تطبيقاته .

خلفية علمية

يقوم علم التفاضل على دراسة الدوال من ناحيتين : النهايات والاتصال أما النهايات ففكرتها الأساسية هو دراسة سلوك الدالة بجوار نقطة معينة من مجال تعريفها سواء كانت معرفة عند تلك النقطة أو لم تكن معرفة وبالتالي قد تكون غير متصلة عندها .

أما فكرة الاتصال الأساسية فتتلخص في عدم انقطاع الدالة في كامل الفترة المعرفة عليها الدالة .

ولدراسة النهايات والاتصال والاشتقاق أهمية كبيرة تتبع من تطبيقاته الواسعة سواء في مجال العلوم الطبيعية أو الاجتماعية (الإنسانية) .

وهناك لابد من التعرف على تزايد وتناقص الدوال وتباعدها وتقاربها ، وهذا وثيق الارتباط بالمتتاليات .

إذا كان التركيز في القسم الأدبي قد تم على تطبيق القواعد مباشرة لحل التمارين إلاّ أن المدرس يجد تعميقاً لمعارفه في كتاب (الصف الحادي عشر) للقسم العلمي ودليل المعلم الذي ننصح بالعودة إليهما .

http://e-learning-moe.edu.ye

ما يجب التأكيد عليه أن يمييز الطالب بأن نهاية الدالة عند (نقطة ما) لايعني إنها معرفة عند تلك النقطة ، وبالتالي قد لاتتساوى نهاية الدالة وقيمتها ، الاّ إن النهاية من طرفي اليمين واليسار يجب أن تتساوى .

نتعرض لمفهوم الاتصال نظراً لعمقه وارتباطه الوثيق بمفهوم النهايات .

توجيهات طرائقية عامة :

١– على المدرس مراجعة أنواع تحليل المقادير الجبرية قبل الدخول في تدريس النهايات .

٢ – مفهوم النهاية جديد على الطالب وعليه ضرورة ترتيب المعلومات للوصول إلى تبسيط هذا المفهوم لطالب القسم الأدبي .

٣ – تقتصر تمارين النهايات فقط بالتحليل ، أو التعويض المباشر لتخدم المشتقات وكتطبيق مباشر على مفهوم النهايات وتوضيح الكميات غير المعرفة مثل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

٤ – تعطى أمثلة توضح الفرق بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية .

٥ – يستفاد من النهاية لتعريف المشتقة وعلى المدرس توضيح للمتغير ومتوسط التغير ثم معدل التغير .

٦ – وضعت قواعد ايجاد المشتقات دون برهان لتطبيقها فقط .

٧ – قبل تدريس ميل المماس تعطى مراجعة لمعادلة المستقيم بمعلومية ميله وكذلك معادلة العمودي على المماس والعلاقة بين ميل المماس والعمودي .

٨ – عند حل تمارين الاشتقاق الضمني مثل ص = (س^{٢} + ٥)^{٢} يعوض بحرف مثل ل على ما بداخل القوس فيكون ص = ٢ ل × لَ ، والتعويض مرة أخرى عن ل ، لَ بدلالة س أو بتطبيق القاعدة مباشرة .

٩ – للربط بين المشتقات وبعض المفاهيم السابقة التي درسها الطالب يجب تكثيف تمارين المسائل التطبيقية الخاصة بذلك .

http://e-learning-moe.edu.ye

١ - ٤ نهايـــة الدالـــة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف :

١ – يتعرف مفهوم النهاية .

٢ – يوجد نهاية دالة .

٣ – يتعرف على مفهوم الاتصال .

٤ – يدرس اتصال دالة معطى .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في حصتين كالتالي :

الحصة الأولى : نهاية الدالة واتصال الدالة .

الحصة الثانية : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى التمرين التالي :

أوجد $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٩ س^{٢} - ٤}{٣ س - ٢}$

إجابات وحلول : تمارين (١ - ٤)

[١] ٤ . [٢] $\frac{١}{٦}$. [٣] $\frac{٣}{١٣}$.

[٤] ٣ . [٥] صفر . [٦] $-\frac{١}{٤}$.

[٧] أ) متصلة

هـ) الدالة غير متصلة عند س = ٢ ، لأن $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ≠ د(س)

ويمكن إعادة تعريفها لكي تكون متصلة على النحو التالي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ س + ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$$

http://e-learning-moe.edu.ye

٤ - ٢ المشتقات

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف :

١- يتعرّف مفهوم النهاية .

٢- يوجد مشتقة دالة .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : مشتقة دالة .

الحصة الثانية : تمارين صفية.

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى التمرين التالي :

أوجد متوسط تغير الدالة ص = ٢ س^{٢} + س عندما تتغير من ١ إلى ٤ ، ثم أوجد معدل التغير عند س = ٢ .

إجابات وحلول : تمارين (٤ - ٢) :

[١] أ) متوسط التغير = صفر ، معدل التغير = صفر

ب) متوسط التغير = ٧ ، معدل التغير = ٧

جـ) متوسط التغير = $\frac{١٤٥}{٥}$ = ٢٩ ، معدل التغير = ٨ ص + ١ .

[٢] أ) معدل التغير = ٤ . ب) معدل التغير = صفر .

جـ) معدل التغير = -٨ .

[٣] أ) نهـا ص = ٢٧ .

ب) عند ن = ١ نهـا ع = ١ ، عند ن = ٥ نهـا ع = ٦٥ .

جـ) عند ع = ٠ ، نهـا ف = ٢ ، عند ع = ٧ ، نهـا ف = ٥ $\frac{١}{٢}$.

[٤] أ) $\bar{ص}$ = صفر . ب) $\bar{ع}$ = ٥

جـ) $\bar{و}$ = ٨ د + ٣ . د) م = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

٤ – ٣ قواعد إيجاد المشتقات

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف :

١– يوجد مشتقة الدالة الثابتة .

٢– يوجد مشتقة الدالة د(س) = س ^{ن} ، ن $\in$ ص .

٣– يوجد مشتقة ثابت في دالة .

٤– يوجد مشتقة حدودية .

٥– يوجد مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما .

٦– يوجد مشتقة حاصل ضرب دالتين وخارج قسمتها .

٧– يوجد مشتقة الدالة الضمنية .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في خمس حصص كالتالي :

الحصة الأولى : مشتقة كل من الدالة الثابتة والدالة د(س) = س ^{ن} ، وثابت في دالة .

الحصة الثانية : مشتقة كل من الحدودية ومجموع دالتين والفرق بينهما .

الحصة الثالثة : مشتقة حاصل ضرب دالتين وخارج قسمتهما .

الحصة الرابعة : مشتقة الدالة الضمنية .

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الخامسة يُعطى التمرين التالي :

أوجد مشتقة الدوال التالية :

أ) ص = (٢ س^{٢} + ٤)^{٢} . ب) ص = ٢ س (س^{٢} + ٢) .

جـ) ص = $\frac{٣ س}{س + ١}$.

http://e-learning-moe.edu.ye

إرشادات وحلول : تمارين (٤ – ٣)

[١] أ) دَ (س) = صفر . ب) هَـ (س) = – ٤ .

جـ) دَ (س) = ١٢ ص^{٢} – ٤ ص . د) تَ (ﻫ) = ٥ س^{٤} + ٣ س^{٢} .

وتحل بطريقتين بفك القوس والثانية كحاصل ضرب دالتين .

هـ) تَ (ﻫ) = ٢٤ (ﻫ^{٢} – ٣ ﻫ)^{٥} (٢ ﻫ – ٣) .

وتحل بطريقتين الأولى بقانون الدالة الضمنية ، أو التعويض عن مداخل القوس بحرف وايجاد المشتقة ، ثم إعادة المقدار إلى أصله .

و) دَ (م) = ٥ م^{٤} – ١٢ م^{٢} + ٣ .

ز) دَ (س) = د (س) = $\frac{-\text{س}^{٢} - ٢\text{ س} - ٢}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$.

ح) إيجاد عامل مشترك م في البسط واختصاره مع المقام ، ثم إيجاد المشتقة ، أو يطبق قاعدة قسمة دالتين .

ط) د (س) = $\frac{-٢}{\text{س}^{٣}}$.

ي) فَ (ﻫ) = (٨ ﻫ – ١) (٦ ﻫ + ١)^{٣} + ١٨ (٤ ﻫ^{٢} – ﻫ) (٦ ﻫ + ١)^{٢} .

ك) عَ (ﻫ) = ٣٦ ﻫ – ٧ .

[٢] أ) دَ (ص) = صفر ، دَ (–٢) = صفر .

ب) هَـ (م) = – ٢ ، هَـ (٥) = – ٢

جـ) فَ (ﻫ) = ﻫ – ٣ ، فَ (٠) = – ٣

فَ (١) = – ٢

فَ (– ١) = – ٤

فَ (ء) = ء – ٣

د) عَ (ﻫ) = ٦ ﻫ ، عَ (٢) = ١٢ ، عَ (٠) = صفر .

http://e-learning-moe.edu.ye

هـ) دَ(س) = $\frac{٢٢ س}{(٢ س + ١)^{٢}}$ ، $\frac{٢٢}{٩}$ ، $\frac{٤٤}{٨١}$ ، $-\frac{٢٢}{٩}$

دَ(١) = $\frac{٤}{٩}$ ، عَ(٢) = $\frac{٨}{٨١}$ ، عَ(−١) = $\frac{-٤}{٩}$

و) هـَ(ص) = ٥ ص^{٤} − ٦ص^{٢}

هـَ(١٠) = صفر ، هـَ(١) = −١ ، هـَ(−١) = −١

ز) دَ(ص) = $\frac{-١}{ص^{٢}} + \frac{١٠}{ص^{٣}}$

دَ(١) = ٩ ، دَ(٢) = ١ .

٤ − ٤ مسائل تطبيقية

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الاهداف :

١− يوجد معادلة مماس بمعلومية المنحنى عند نقطة عليه .

٢− يوجد معادلة العمودي بمعلومية معادلة المنحنى عند نقطة عليه .

٣− يوجد السرعة اللحظية بمعلومية علاقة تربط المسافة بالزمن .

٤− يحل مسائل تطبيقية على المشتقات .

تنفيذ البند :

ينفذ هذا البند في حصتين كالتالي :

الحصة الأولى : مسائل تطبيقية .

الحصة الثانية : تمارين صفية .

التقويم :

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات وحل التمارين الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى التمرين التالي :

أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى ص = س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ عند النقطة الواقعة على المنحنى احداثيها السيني = −١ .

http://e-learning-moe.edu.ye

إرشادات وحلول : تمارين (٤ - ٤)

[١] أ) معادلة المماس ص = ٢ – ٢ س عند س = –١ ، وكذلك بالمثل إيجاد المعادلة المماس عند س = صفر ، ١ .

ب) معادلة المماس : ٤ ص = –٣ – ١٢ .

جـ) معادلة المماس : ص = –٣ س .

د) معادلة المماس : ص = ٢٨ س – ٤٠ .

هـ) معادلة المماس : ٢ ص + ١٣ س + ٢١ = صفر .

[٢] أ) معادلة المماس ص = ٧ س – ٤ ، معادلة العمودي (الناظم)

٧ ص = ٧٢ – س عند س = ٢

ب) معادلة المماس ص = –٢٣ س – ٤١ ، معادلة العمودي (الناظم)

٢٣ ص = س – ٤١٣ عند س = –١

معادلة المماس ص = س – ٤١ ، معادلة العمـــــودي (الناظم)

ص = –س – ٣٩ عند س = –١

جـ) معادلة المماس ص = –٨ س + ١٢ ، معادلة العمودي (الناظم)

٨ص = س + ٣١ عند س = ١

معادلة المماس ص = ٨ س + ١٢ ، معادلة العمودي (الناظم)

٨ ص = – س + ٣١ عند س = –١ .

د) معادلة المماس ص = –٤ ، معـادلة العمـودي ٤ ص = س

عند النقطة س = ٠

معادلة المماس ص = –٣ ، معادلة العمودي ص = س – ٤

عند النقطة س = ١ .

[٣] النقاط (٠ ، ٠) ، ($\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٢٧}$) يكون المماس موازياً محور السينات .

[٤] نوجد ميل المماس للمنحنى يساوى ميل المستقيم ص = ٤ س باعتباره يوازيه ، ثم نوجد من المعادلة قيمة س ، ص ، ومنها نتوصل إلى معادلة المماس .

http://e-learning-moe.edu.ye

[٥] أ) ف (د) = ٤ د^{٣} – ٣ د + ٣ عند د = ٠ ، ١ ، ٣ .

فَ (د) = ١٢ د^{٢} – ٣ ، وهي السرعة اللحظية .

فَ (٠) = –٣ ، ف (١) = ١٢ – ٣ = ٩

فَ (٣) = ١٠٥

وبالمثل تحل بقية التمارين في (ب) ، (جـ) .

[٦] ف (د) = د^{٣} – ١٢ د + ٧

فَ (د) = ٣ د^{٢} – ١٢

فَ (٤) = ٣ × (٤)^{٢} – ١٢ = ٢٤

سرعته بعد ثوان = ٢٤ م / ث

المسافة = ع × د = ٢٤ × ٤ = ٩٦ متر

عند انعدام الحركة ع = ٠ .

٣ د^{٢} – ١٢ = ٠ ⇐ د^{٢} = ٤ ⇐ د = ٢

تنعدم الحرة بعد دقيقتين وبمسافة ٢ × ٢٤ = ٤٨ متر .

٤ – ٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف :

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق اهداف الوحدة .

http://e-learning-moe.edu.ye

تنفيذ الاختبار :

ينفذ الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه له ليقيس أهداف الوحدة حسب الجدول الآتي :

رقم السؤال	رقم الهدف
[١] أ)	١ ، ٢
ب)	٣ ، ٤
جـ)	٥ ، ٦
[٢] أ)	٧
ب)	٨ ، ٩ ، ١٠
[٣] أ)	١١
ب)	١٢

الاختبار:

[١] أ) أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٥س}{٣ س}$.

ب) ادرس اتصال الدالة د(س) = $\frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ عند (س = ٣)

وأعد تعريفها (إن أمكن) .

جـ) بواسطة تعريف المشتقة أوجد مشتقة الدالة د(س) = $\frac{٥}{س}$.

[٢] أ) ليكن د(س) = أ حيث أ ثابت . أثبت أن $\dot{د}$ (س) = صفر .

ب) أوجد مشتقة الدالة د(س) = (٥ س^{٢} + ٤ س) .

[٣] أ) أوجد مشتقة الدالة د(س) = $\frac{س^{٢}}{س + ٣}$.

ب) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى ص = ٤ س^{٢} + ٣ س – ٥ عند النقطة (١ ، ٢) .

http://e-learning-moe.edu.ye

المصطلحات الواردة في الوحدة :

Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Limit	نهاية
Derivative	مشتقة
Instamt velocity	السرعة اللحظية
Function	دالة
Slope	ميل
Average velocity	السرعة المتوسطة
Average rate of change	متوسط معدل التغير
Normal	الناظم (العمودي)
Interval	فترة
Constant	ثابت
Variable	متغير
Differentiable	قابل للاشتقاق
Rules	قواعد
Tangent	مماس

المراجع العربية :

١ – مسائل في الرياضيات العالية – ف . مينورسكي . دار الطباعة والنشر – موسكو – ١٩٧٩م .

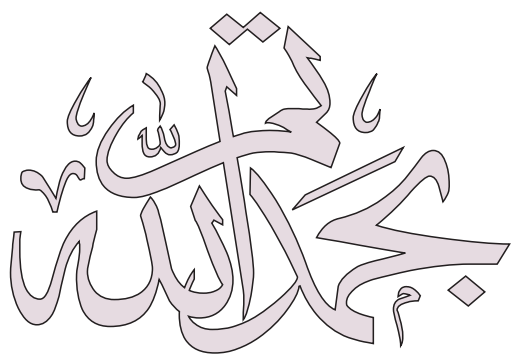
٢ – التفاضل والتكامل / سلسلة الشامل في الرياضيات الجزء الأول – د. محمد ابو صالح – عبدالرحمن القواسمة – فاضل شطناوي مؤسسة مصري للتوزيع – لبنان – الطبعة الثانية ١٩٨٤م .

المراجع الأجنبية :

1) Calculus and Analytic Geometry by George B. thomas JR. Third Edition - Addition - westey Publich company .

2) Calculus by : Frank Ayres and JC Ault .

http://e-learning-moe.edu.ye



http://e-learning-moe.edu.ye

http://e-learning-moe.edu.ye